CHAPITRE

𝒜 𝒜

TSI[1]

Lycée Artaud

2025/2026

Dimension finie

Dans ce chapitre, on va continuer à parler d'applications linéaires et d'espaces vectoriel, mais dans un cadre particulier, celui de la dimension finie. Cette contrainte supplémentaire va permettre de simplifier certaines tâches...

Sommaire

I Notion de dimension finie

I.1 Existence de bases pour un ev $E \neq \{0\}$

Définition I.1.1

On dit que E est un espace vectoriel de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice fine. Dans le cas contraire on dit que E est de **dimension infinie**.

EXEMPLE –

- Citer des exemples d'espaces vectoriels de dimension finie :

S1

- Citer (sans démo) des exemples d'espaces vectoriels de dimension infinie :

S2

- Montrer (par l'absurde) que $K[X]$ est de dimension infinie :

S3

Le résultat suivant est à la base de tout ce premier paragraphe :

Propriété I.1.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\mathscr{G}$ est une famille de n éléments de E, alors toute famille de $n+1$ éléments de $\text{Vect}(\mathscr{G})$ est nécessairement liée.

Preuve

Sans réelle difficulté, mais on l'admettra ici. □

REMARQUES – On retiendra que si $E = \text{Vect}(g_1, \ldots, g_n)$ alors :

- Toute famille de E de plus de $n+1$ éléments est nécessairement ....
- Toute famille libre de E possède au plus ....

Olivier BRÉBANT
Lycée Artaud – 2025/2026

Les conséquences suivantes sont importantes :

☺ Théorème I.1.3 (Base incomplète)

Soit $E = \text{Vect}(\mathscr{G})$ un ev de dimension finie. Si $E \neq \{0\}$ alors **toute famille libre** $\mathscr{L}$ de E peut être **complétée** en une base de E. On peut même compléter cette famille à l'aide de vecteurs de $\mathscr{G}$.

☺ Théorème I.1.4 (Base extraite)

Soit $E \neq \{0\}$ un ev de dimension finie. Alors de **toute famille génératrice** de E on peut **extraire** une base de E.
En particulier :

$$\boxed{\textbf{tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à } \{0\} \textbf{ admet une base}}$$

Preuve

On admettra ces résultats un peu technique à démontrer mais ils sont très importants... □

I.2 Dimension d'un ev

☺ Théorème I.2.1 (et Définition)

Soit E un ev de dimension finie.

- Si $E \neq \{0\}$ alors toutes ses bases ont le même nombre d'éléments n qui sera appelé **la dimension** de E (notation $dim(E) = n$).
- Si $E = \{0\}$ on dira par convention qu'il est de dimension 0.

Preuve

S4

□

Vocabulaire

- Si $dim(E) = 1$ on parle de *droite vectorielle.*
- Si $dim(E) = 2$ on parle de *plan vectoriel.*

Exemple – Donner les dimensions des espaces vectoriels usuels :

S5

Question : pouvez-vous traduire en terme de sev et de dimension l'ensemble des solutions d'un système linéaire, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 ou 2 ?

Remarques – Dans un ev de dimension n, que dire

- d'une famille de p éléments avec $p > n$? ....
- d'une famille de p éléments avec $p < n$? ....

On obtient une caractérisation des bases en dimension finie avec le théorème suivant :

☺ Théorème I.2.2 (caractérisation des bases)

Soit $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille d'un ev E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\mathscr{F}$ est une base de E
- $\mathscr{F}$ est libre et possède n éléments
- $\mathscr{F}$ est génératrice et possède n éléments

Preuve

Idée : une base est une famille libre et génératrice. On utilise alors les théorèmes de la base incomplète et de la base extraite... □

I.3 Sev d'un ev de dimension finie

☺ Théorème I.3.1

Si E est de dimension finie, alors tout sev F de E est aussi de dimension finie.
De plus $dim(F) \leqslant dim(E)$ avec égalité si et seulement si $F = E$.

Preuve

Admise aussi... □

Important ! – Soit F un sev de E :

- Il est possible de compléter toute base de F en une base de E (théorème de la base incomplète).
- **Attention**, il n'est en général pas possible à partir d'une base de E d'en extraire une base de F. Donner un contre-exemple :

S6

Méthode – en pratique pour montrer l'égalité de deux ev de dimension finie, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des dimensions.

Par exemple, quels sont tous les sev de $\mathbb{K}$?

S7

☐ ✍ **Exercice AA.1** ☐ ✍ **Exercice AA.2** ☐ ✍ **Exercice AA.3** ☐ ✍ **Exercice AA.4** ☐ ✍ **Exercice AA.5**

II Somme de sev et dimensions

II.1 Base adaptée à une somme

Propriété II.1.1

Soit E un ev de dimension finie $n \geqslant 2$ et $p \in \{1 \dots n-1\}$.

1. Si $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_k)$ est une famille libre, alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_k)$ sont en somme directe.
2. Si $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $E_1 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $E_2 = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sont deux sev supplémentaires de E. De plus $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E_1 et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E_2.
3. Soit F et G deux sev supplémentaires de E, non réduits à $\{0\}$. Si $(f_1, \dots, f_p)$ est une base de F et $(g_1, \dots, g_q)$ est une base de G, alors la famille $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de E.

Une telle **base est dite adaptée** à la décomposition $E = F \oplus G$.

Preuve

On l'admettra mais elle ne pose aucune difficulté... ☐

On en déduit en particulier la propriété suivante :

Propriété II.1.2

Tout sev F de E admet au moins un supplémentaire.

II.2 Dimension d'une somme, caractérisation d'une somme directe

Propriété II.2.1 (Formule de Grassmann)

Si F et G sont deux sev de dimension finie d'un ev E quelconque, alors :

$$\boxed{dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)}$$

Preuve
Admise mais intéressante... □

Application directe : dans $\mathbb{R}^3$, que dire de l'intersection de deux plans vectoriels ?

S8

Propriété II.2.2 (Caractérisation des sommes directes)

Soit E un ev de dimension finie, ainsi que F et G deux sev de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $E = F \oplus G$
- $F \cap G = \{0\}$ et $dim(E) = dim(F) + dim(G)$.
- $F + G = E$ et $dim(E) = dim(F) + dim(G)$.

Preuve
La preuve découle directement de la formule de Grassmann. □

Exemple – Dans $\mathbb{R}^2$, que dire de $F = \text{Vect}(1, 1)$ et de $G = \text{Vect}(1, 0)$? ....

□ ✍ **Exercice AA.6** □ ✍ **Exercice AA.7**

III Applications linéaires en dimension finie

III.1 Rang d'une famille de vecteurs

Dans le chapitre sur les systèmes, on a déjà parlé de rang (au sujet des matrices associées). On va ici donner d'autres façon d'interpréter cette notion de rang.

♪ Définition III.1.1 (rang d'une famille)

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs d'un ev quelconque E. On appelle **rang de $\mathscr{F}$** la dimension de $\text{Vect}(\mathscr{F})$. On note $\text{rg}(\mathscr{F})$.

Remarques – Soit $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille d'un ev E de dimension finie.

- Comparer $\text{rg}(\mathscr{F})$ et n (cas d'égalité ?) : ....

  ....
- Comparer $\text{rg}(\mathscr{F})$ et $dim(E)$ (cas d'égalité ?) : ....

  ....

- On suppose de plus que $\mathscr{F}$ contient r vecteurs indépendants. Comparer $\text{rg}(\mathscr{F})$ et r (cas d'égalité ?) :

  ....

  ....

☐ ✍ **Exercice AA.8**

On reparlera du rang plus longuement dans le paragraphe sur les matrices.

III.2 Rang d'une application linéaire, théorème du rang

On parle cette fois-ci de rang d'une application linéaire, et on va voir le lien avec la notion de rang déjà évoquée...

♪ Définition III.2.1 (rang d'une application linéaire)

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle rang de u, noté $\text{rg}(u)$, la dimension de $Im(u) = u(E)$.

Question 1: Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ avec $dim(E) = n$, que dire de $\text{rg}(u)$ (cas d'égalité...) ? ....

....

En effet :

S9

Question 2: Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ avec $dim(F) = p$, que dire de $\text{rg}(u)$ (cas d'égalité...) ? ....

....

En effet :

S10

Propriété III.2.2 (conservation du rang)

- Si u et v sont deux applications linéaires dont la composition $u \circ v$ ait un sens, alors :

$$\text{rg}(u \circ v) \leqslant \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$$

- En particulier : on ne change pas le rang d'une application linéaire si on la compose à droite ou à gauche par un isomorphisme.

☺ Théorème III.2.3 (Théorème du rang)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et u une application linéaire de E dans un espace vectoriel F quelconque. Alors u est de rang fini et on a :

$$\boxed{dim(E) = \text{rg}(u) + dim(Ker(u))}$$

Applications directes :

- Peut-on trouver $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^3)$ dont le noyau est une droite vectorielle ?

S11

- Soit E un ev de dim n et φ une forme linéaire non nulle. Quelle est la dimension de son noyau ?

S12

☐ ✍ **Exercice AA.9** ☐ ✍ **Exercice AA.10** ☐ ✍ **Exercice AA.11** ☐ ✍ **Exercice AA.12**

III.3 Rang d'une matrice

♪ Définition III.3.1 (rang d'une matrice)

On définit le rang d'une matrice comme le rang de la famille formée par ses vecteurs colonnes.

Dans les chapitres « Systèmes » et « Calcul matriciel » on avait défini le rang d'une matrice comme la rang du système homogène associé (qui correspondait au nombre de pivots). Pour éviter trop de technicité, on admettra que cette nouvelle définition est simplement une autre interprétation de la même notion. Ainsi tous les résultats déjà rencontrés sont bien sûr encore valables.

Plus généralement, on peut déterminer le rang d'une matrice à l'aide de la propriété suivante que l'on admettra :

Propriété III.3.2 (Equivalence des notions de rang)

Le rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est égal :

- au rang de la famille de ses vecteurs colonnes,
- au rang de la famille de ses vecteurs lignes,
- au rang de toute application linéaire qu'elle représente,
- au rang de tout système dont elle est la matrice.

III.4 Dimension et isomorphismes

Propriété III.4.1

Soit E un ev de dimension finie.
F est isomorphe à E si et seulement si F est de dimension finie et $dim(F) = dim(E)$.

☺ Théorème III.4.2 (Caractérisation des isomorphismes)

Soient E et F deux ev de **même** dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On a :

$$u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective} \iff u \text{ est bijective}$$

Olivier BRÉBANT
Lycée Artaud – 2025/2026

Preuve

S13

$\square$

Application directe : Si u et v sont deux endomorphismes de E tels que $v \circ u = Id_E$ alors ils sont bijectifs et réciproques l'un de l'autre.

S14

Propriété III.4.3 (Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$)

Si E et F sont deux ev de dimension finie alors : $dim(\mathscr{L}(E, F)) = dim(E) \times dim(F)$.

Preuve

On a vu dans le chapitre « applications linéaires » que si $dim(E) = p$ et $dim(F) = n$ on pouvait construire un isomorphisme entre les espaces $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Or $dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$, donc $dim(\mathscr{L}(E, F)) = n \times p$. $\square$

☐ ✍ **Exercice AA.13** ☐ ✍ **Exercice AA.14**

IV Interprétation matricielle

Dans le chapitre sur les applications linéaires on a introduit l'outil « matrices » pour réaliser plus simplement certaines opérations sur des familles de vecteurs ou sur des applications linéaires. Voyons ce que cela donne pour effectuer des changements de base et pour calculer des rangs.

IV.1 Matrice de changement de base pour une famille de vecteurs

La propriété vue dans le chapitre « Applications linéaires » disant qu'un endomorphisme était bijectif si et seulement si l'image d'une base était une base se traduit matriciellement ainsi :

Propriété IV.1.1

Soit E un ev muni d'une base $\mathscr{B}$. Une famille $\mathscr{B}'$ est une base de E si et seulement si la matrice $A = M_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ est inversible.

Preuve

En effet, il suffit d'introduire l'endomorphisme u dont sa matrice dans $\mathscr{B}$ est A. $\square$

Remarques – Cette propriété se traduit aussi en disant qu'une matrice *carrée* est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une famille libre. On admettra que l'on a également la même phrase en considérant les lignes.

Exemple – Que dire de l'inversibilité d'une matrice triangulaire ?

S15

♪ Définition IV.1.2 (Matrice de passage)

Soit E un ev muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. La matrice de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$ est appelée **matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$** et se note souvent $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

Remarques – Les colonnes de la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ sont donc les décompositions des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

D'après la propriété précédente IV.1.1 on déduira sans peine que :

Propriété IV.1.3

La matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et on a :

$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}}$$

On en déduit des formules de changement de base bien pratiques :

Propriété IV.1.4 (formules de changement de bases)

Soit E un ev muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. On note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage et on considère $x \in E$. Alors :

$$M_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} M_{\mathscr{B}'}(x)$$

Attention ! – Bien faire attention à l'ordre qui n'est pas très intuitif. Cette formule exprime les coordonnées du vecteur x dans l'ancienne base $\mathscr{B}$ en fonction de ses coordonnées dans la nouvelle $\mathscr{B}'$ (un moyen mnémotechnique serait de constater qu'il y a une sorte de relation de Chasles dans l'écriture indicielle des bases.)

Remarques – En revanche, pour la matrie de passage c'était plutôt naturel, puisque qu'on exprimait les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne.

Généralisation à une famille :
Si $\mathscr{F}$ est une famille de p vecteurs dans un ev E de dimension n, en notant $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice de $\mathscr{F}$ dans une base $\mathscr{B}$ de E et $A' \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice de $\mathscr{F}$ dans une base $\mathscr{B}'$ de E, alors on a : $A = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}A'$. (En effet, la j-ème colonne de A est le produit de P par la j-ème colonne de A'.)

IV.2 Changement de bases pour une application linéaire

On va utiliser le paragraphe précédent, en gardant à l'esprit que cette fois-ci il y a deux espaces vectoriels à considérer, donc éventuellement 4 bases !

Propriété IV.2.1

Soit E et F deux ev ainsi que $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Notons :

- $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases de E avec P la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$.

- $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ deux bases de F avec Q la matrice de passage de $\mathscr{F}$ à $\mathscr{F}'$.
- A la matrice de u dans les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$.
- A' la matrice de u dans les bases $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{F}'$.

Alors on a : $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$.

Preuve

S16

□

Vocabulaire – deux matrices A et B sont dites équivalentes s'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $A = QBP$. Ainsi les matrices d'une application linéaire u exprimées dans des couples de bases différentes sont équivalentes. On peut montrer la réciproque, c'est à dire que si deux matrices sont équivalentes, alors elles représentent la même application linéaire dans des couples de bases adaptées.

Notons le cas particulier important des endomorphismes :

Propriété IV.2.2 (changement de bases pour les endomorphismes)

Soit E muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ avec P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. On considère $u \in \mathscr{L}(E)$. En notant A la matrice de u dans $\mathscr{B}$ et A' celle dans $\mathscr{B}'$ on a :

$$A' = P^{-1}AP$$

ou encore :

$$M_{\mathscr{B}'}(u) = P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}M_{\mathscr{B}}(u)P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$$

Remarques –

- Deux matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$. Ainsi les matrices d'un endomorphisme u exprimées dans deux bases différentes sont semblables. La réciproque est bien sûr vraie également.
- *On peut noter le moyen mnémotechnique sur la relation de chasles dans l'écriture des bases...*

Exemple – Une utilisation classique est de déterminer l'expression de u^n. En effet, notons A la matrice de u dans une première base. Si l'on peut trouver une autre base (on note P la matrice de passage) dans laquelle la matrice (disons D) de u est propice pour calculer ses puissances itérées (par exemple si D est diagonale !) alors on a $A = PDP^{-1}$, puis $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ et plus généralement $A^n = \cdots = PD^nP^{-1}$. *(Technique déjà vue dans le chapitre calcul matriciel)*