

PLANCHE AA

DIMENSION FINIE

□ Exercice AA1 (Rappels)

Q1 Dans $E = \mathbb{R}^4$, considérons $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.
Déterminer une base de F et déduire sa dimension.

Q2 Dans $E = \mathbb{R}^4$, considérons $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_3 + x_4 = 0\}$.
Déterminer une base de F et déduire sa dimension.

(On verra plus loin une méthode bien plus efficace pour déterminer la dimension sans exhiber de base, grâce au théorème du rang...)

□ Exercice AA2 (Base et dimension)

On considère l'ensemble $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \exists(A, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A \cos(x - \varphi)\}$.

Q1 Montrer que $F = \text{Vect}(\cos, \sin)$.

Q2 Montrer que la famille $\{\cos, \sin\}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Q3 En déduire la dimension de F .

□ Exercice AA3 (Un espace de dimension infinie)

Q1 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions polynomiales $p_k : x \mapsto x^k$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, montrer que la famille $\mathcal{P}_n = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ est libre.

Q2 En déduire que l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est de dimension infinie.

□ Exercice AA4 (Égalité de sous espace vectoriels)

Dans \mathbb{R}^3 on considère :

$$F = \text{Vect}((1, 1, -2), (-2, 1, 1)) \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$$

Montrer que $F = G$.

□ Exercice AA5 (Égalité de sous espace vectoriels)

On souhaite montrer que, dans \mathbb{R}^3 , les deux vecteurs $u = (1, 1, 0)$ et $v = (1, 0, 1)$ engendrent le même espace vectoriel que les vecteurs $w = (1, 3, -2)$ et $t = (1, 4, -3)$. Pour cela on va envisager deux méthodes. Notons $P = \text{Vect}(u, v)$ et $Q = \text{Vect}(w, t)$.

Q1 *Méthode algébrique 1* : montrer que u et v sont dans Q par exemple en calculant des déterminants ou en utilisant des familles liées, puis conclure en justifiant que P et Q sont des plans.

Q2 *Méthode algébrique 2* : commencer par chercher une équation implicite de Q puis montrer que u et v sont dans Q .

Q3 *Méthode géométrique* : justifier que P et Q sont des plans confondus en montrant qu'ils sont parallèles et possèdent un point commun.

□ **Exercice AA6 (Sommes directes)**

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = t \text{ et } 2x = z + t\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / z + 2t = 0 \text{ et } z + t = x\}$.

Q1 Montrer que F et G sont des sev de dimension 2 et exhiber deux bases \mathcal{B}_F et \mathcal{B}_G .

Q2 Prouver que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^4 par deux méthodes :

- Montrer que la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de \mathbb{R}^4 (Ainsi \mathcal{B} est une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$.)
- Avec la caractérisation des sommes directes.

□ **Exercice AA7 (Sommes directes)**

On considère l'ev $E = \mathbb{R}^3$. Notons $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que F et G sont supplémentaires.

□ **Exercice AA8 (Rang d'une famille de vecteurs)**

Déterminer le rang des familles suivantes :

Q1 dans \mathbb{R}^4 , la famille $\mathcal{F} = ((1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (-1, -1, 1, 0), (0, 0, 2, 0))$:

- Méthode 1 : on pourra remarquer que le 4e vecteur s'exprime en fonction du deuxième et du troisième
- Méthode 2 : introduire la matrice formée par les 4 vecteurs, puis faire des opérations élémentaires sur les colonnes pour obtenir une matrice dont le rang est simple à déterminer (*matrice échelonnée*)

Q2 dans $\mathbb{C}[X]$, la famille $\mathcal{F} = (X^2 + X + 1, X^2 + 3X + 1, 2X, X^3 + 3)$.

□ **Exercice AA9 (Th. rang, formule de Grassmann)**

Retour sur le premier exercice :

Q1 Dans $E = \mathbb{R}^4$, considérons $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. En utilisant l'application linéaire $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ démontrer que F est de dimension 3.

Q2 Dans $E = \mathbb{R}^4$, considérons $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_3 + x_4 = 0\}$.

a. Méthode 1 : soit $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4)$

- Montrer que $\text{rg}(u) = 2$
- Avec le théorème du rang, montrer que $\dim(F) = 2$.

b. Méth. 2 : soit $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 = 0\}$ et $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_3 + x_4 = 0\}$.

- Exprimer F à partir des deux sev F_1 et F_2 .
- Donner les dimensions de F_1 et F_2 .
- Remarquer que F_1 n'est pas inclus dans F_2 , et en déduire que $\dim(F_1 + F_2) = 4$
- Conclure avec la formule de Grassmann sur la dimension de F .

□ **Exercice AA10**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ défini par : $D(P) = P(X + 1) - P(X)$.

Montrer que $\text{Ker}(D) = \mathbb{R}_0[X]$ et que $\text{Im}(D) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

□ Exercice AA11

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ définie par :

$$(x', y', z') = f(x, y, z, t) \iff \begin{cases} x' = x + 4y - 2z \\ y' = -x - 3y + 3z + t \\ z' = x + y - 5z + \lambda t \end{cases}$$

Déterminer une famille génératrice de $\text{Im } f$. Suivant λ , f est-elle surjective ? injective ? Déterminer son noyau.

□ Exercice AA12

Soit $n \geq 2$. On pose $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n .

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^n tel que, pour tout $1 \leq i < n$, $f(e_i) = e_n$ et $f(e_n) = \sum_{k=1}^n e_k$.

Q1 Combien d'applications f vérifient les conditions de l'énoncé ?

Q2 Donner le rang de f et la dimension de son noyau.

Q3 Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Donner l'expression de $f(x)$ dans \mathcal{B} .

□ Exercice AA13

On considère x_1, \dots, x_n , n éléments distincts deux à deux dans \mathbb{K} . Montrer que pour tout $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $P(x_i) = y_i$.

(On pourra introduire l'application $\varphi : P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \mapsto (P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)) \in \mathbb{K}^n \dots$)

□ Exercice AA14

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On considère les endomorphismes u et v définis par :

$$u(P) = XP(X) \text{ et } v(P) = P'(X)$$

u et v sont-ils injectifs ? surjectifs ? Cela est-il contradictoire avec le cours ?

□ Exercice AA15 (Changement de base)

Dans \mathbb{R}^2 , on considère la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j}) = ((1, 0), (0, 1))$. On note $\vec{i}' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (c'est à dire

$M_{\mathcal{B}_0}(\vec{i}') = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$), $\vec{j}' = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$, $\vec{I} = (2, 3)$ et $\vec{J} = (4, 5)$. On considère alors les bases $\mathcal{B}_1 = (\vec{i}', \vec{j}')$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{I}, \vec{J})$.

Q1 On note d la droite dont une équation dans la base \mathcal{B}_0 est : $y - x = 0$. Faire un croquis représentant \mathcal{B}_0 , \mathcal{B}_1 et d , puis donner une équation de cette même droite dans la base \mathcal{B}_1 (on envisagera une solution graphique, puis on la vérifiera par le calcul d'un changement de base).

Q2 a. Donner la matrice de passage de \mathcal{B}_0 à \mathcal{B}_2 .

b. Donner une équation cartésienne dans la base \mathcal{B}_2 de la courbe Γ dont une équation cartésienne dans \mathcal{B}_0 est : $x^2 - 2xy + y^2 = 1$.

□ Exercice AA16 (Changement de base)

Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère la famille $\mathcal{B} = ((X - 1)^3, (X - 1)^2(X + 1), (X - 1)(X + 1)^2, (X + 1)^3)$.

Q1 Montrer que \mathcal{B} est une base de E puis donner la matrice de passage M de la base canonique à \mathcal{B} .

Q2 Montrer que $M^{-1} = \frac{1}{8}M$.

□ **Exercice AA17 (Changement de base pour une application linéaire)**

Soit E de base $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ et F de base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$. On note $u \in \mathcal{L}(E, F)$ défini par $u(e_1) = 2f_1 + 3f_2$ et $u(e_2) = f_1 - f_2 + 2f_3$.

Q1 Donner la matrice A de u dans les bases \mathcal{E} et \mathcal{F} .

Q2 On note $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 + e_2$, $f'_1 = f_1 + f_2$, $f'_2 = f_1 + f_3$, $f'_3 = f_2 + f_3$. Montrer que $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2)$ et $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$ sont des bases de E et F . Déterminer la matrice de u dans les bases \mathcal{E}' et \mathcal{F}' .

□ **Exercice AA18 (Utiliser un changement de coordonnées pour réduire une équation)**

Le plan est muni d'un ROND (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit la courbe \mathcal{C} du plan, dont l'équation cartésienne dans (O, \vec{i}, \vec{j}) est : $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 6 = 0$

Q1 Sans calcul, déterminer la matrice P canoniquement associée à la rotation vectorielle R d'angle $\frac{\pi}{4}$. On note alors (O, \vec{u}, \vec{v}) le repère image de (O, \vec{i}, \vec{j}) par la rotation R .

Q2 Soit (x, y) un point du plan repéré dans (O, \vec{i}, \vec{j}) , et (x', y') ses coordonnées dans (O, \vec{u}, \vec{v}) . Exprimer (x, y) en fonction de (x', y') .

Q3 Déterminer l'équation de \mathcal{C} dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) . [Solution : $x'^2 + 2y'^2 = 3$]

Q4 (Identifier alors la nature de \mathcal{C} et représenter son allure.)

□ **Exercice AA19 (Étudier une application linéaire dans plusieurs bases)**

Soit $B_1 = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 , $B_2 = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . On considère l'application linéaire u de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 définie par :

$$u(e_1) = 2f_1 - f_3, u(e_2) = -f_2 + f_3$$

Q1 Déterminer la matrice M associée à u relativement aux bases B_1, B_2 . Comment en déduire l'expression de $(x, y) \mapsto u(x, y)$?

Q2 On considère B'_1 et B'_2 les bases de E et F respectivement définies par:

$$B'_1 = (e_2, e_1), \quad B'_2 = (f_3, f_1, f_2)$$

Déterminer la matrice N associée à u relativement aux bases B'_1, B'_2 .

Q3 Déterminer les matrices de passage $P_{B_1 B'_1}$ et $P_{B_2 B'_2}$, et retrouver l'expression de N à l'aide de M .