

# CHAPITRE

# *A B*



TSI<sup>1</sup>

Lycée Artaud

2025/2026

# Intégration

On a déjà rencontré et travaillé sur la notion d'intégrale, avec notamment des moyens de calculs et le lien avec les primitives. L'objectif de ce chapitre est d'ajouter deux nouveaux outils importants pour calculer des intégrales (intégration par parties et changement de variable), puis de faire encore un tour par la formule de Taylor et enfin voir comment les intégrales peuvent nous aider à calculer des sommes grâce aux sommes de Riemann.

---

## Sommaire

<b>I</b>	<b>Intégrale : rappels du chapitre 0 (équations différentielles)</b>	<b>2</b>
I.1	Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment . . . . .	2
I.2	Propriétés immédiates . . . . .	4
<b>II</b>	<b>Calcul intégral</b>	<b>5</b>
II.1	Lien avec primitives et dérivées . . . . .	5
II.2	Intégration par parties . . . . .	5
II.3	Changement de variables . . . . .	6
<b>III</b>	<b>Formule de Taylor</b>	<b>7</b>
<b>IV</b>	<b>Sommes de Riemann</b>	<b>8</b>

---

# I Intégrale : rappels du chapitre O (équations différentielles)

On a déjà introduit la notion d'intégrale et leur lien avec les primitives dans le chapitre O (équations différentielles). Rappelons ici ce qui a déjà été vu...

## I.1 Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

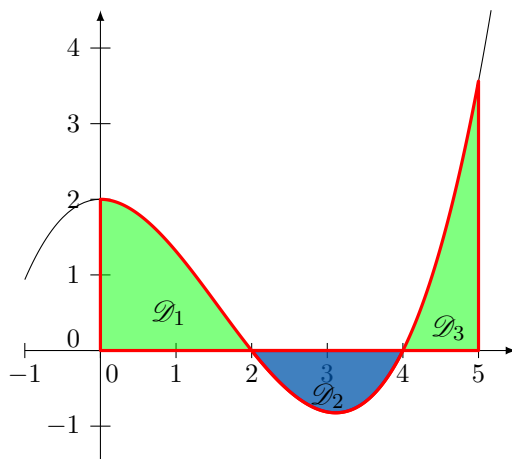
### ♪ Définition I.1.1 (intégrale d'une fonction continue sur un segment)

- Si  $f$  est une fonction continue et *positive* définie sur un intervalle  $[a; b]$  alors l'intégrale de  $f$  sur  $[a; b]$  est l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  délimité par la courbe de  $f$ , l'axe horizontal et les deux droites verticales d'équations  $x = a$  et  $x = b$ . On la note :

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} f(x) dx = \text{aire}(\mathcal{D})$$

- Si  $f$  est une fonction continue et *négative* sur  $[a; b]$  alors :  $\int_{[a;b]} f(x) dx = -\text{aire}(\mathcal{D})$
- Si  $f$  est continue et de *signe quelconque*, alors on découpe l'intervalle en morceaux sur lesquels la fonction  $f$  garde un signe constant et on applique les concepts précédents en ajoutant les intégrales de chaque morceau.

### Exemple (I.1.2)



Ainsi, si  $f$  est la fonction dont la représentation graphique est donnée ci-contre, on a :

$$\int_0^5 f(x) dx = \text{aire}(\mathcal{D}_1) - \text{aire}(\mathcal{D}_2) + \text{aire}(\mathcal{D}_3)$$

### Exemple (I.1.3)

Dans certains cas simples, on peut utiliser la définition pour calculer des intégrales :

- Calculer  $\int_{[-2;3]} 2 dx$

S1

- Calculer  $\int_{[0;3]} x - 1 \, dx$

S2

**REMARQUES** – L'énoncé de la définition précédente sous-entend que  $a \leq b$  (pour que l'intervalle  $[a; b]$  soit correct), mais on peut s'affranchir de cette contrainte en utilisant la définition suivante :

#### ♣ Définition I.1.4 (Notation avec bornes)

Soit  $f$  définie et continue sur un intervalle  $I$ . Pour tout  $a$  et  $b$  dans  $I$  on note :

- Si  $a \leq b$ , alors  $\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a;b]} f(x) \, dx$
- Si  $a > b$ , alors  $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_{[b;a]} f(x) \, dx$

On a vu également le lien avec la notion de primitives avec en particulier la propriété fondamentale suivante (on verra un peu mieux plus loin dans ce cours... ) :

#### Propriété I.1.5 (Intégrale et primitive)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction continue sur  $I$ ,  $(a, b) \in I^2$  et  $F$  une primitive de  $f$ . Alors on a :

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

#### Exemple (I.1.6)

Cette propriété est très pratique pour calculer des intégrales de fonctions dont on connaît des primitives, et en déduire des aires de domaine :

Calculer l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe représentant la fonction sinus entre  $x = 0$  et  $x = \pi$  :

S3





2. Pour tout  $x > 0$  calculer  $J = \int_1^x \ln(t)dt$  et donner une primitive de  $\ln$

S7

3. Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction arctan

S8

Exercice AB.6

Exercice AB.7

Exercice AB.8

### II.3 Changement de variables

#### Propriété II.3.1 (Changement de variables)

Si  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et si  $f$  est continue sur  $\varphi(I)$ , alors, pour tous  $a$  et  $b$  dans  $I$  on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

#### Preuve

Cette formule qui semble compliquée n'est en réalité que la version pour les primitives de la formule de dérivation d'une composée...

On écrit que  $(F \circ \varphi)'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ , ainsi  $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt =$

S9

□

En pratique l'utilisation de cette formule ne demande pas non plus trop d'effort de mémorisation :

- L'utilisation de « droite à gauche », c'est à dire quand on a repéré une expression de la forme  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ , a déjà été vue pour calculer des primitives. Par exemple, déterminer une primitive de  $f : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$  :

S10

- L'utilisation de « gauche à droite » peut parfois aboutir lorsque l'on n'arrive pas à déterminer de primitives. Il suffit de faire le *bon* changement de variable. Techniquement, pour calculer  $\int_{\dots}^{\dots} f(x) dx$  on :

- pose  $x = \varphi(t)$
- on précise sur quel domaine  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$
- on précise les nouvelles bornes
- on calcule  $dx$ , c'est à dire  $\varphi'(t)dt$

Par exemple, calculer  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) \cos(x)}{1 + \sin^2(x)} dx$  (on posera  $t = \sin(x) \dots$ ) :

S11

☐ ↻ Exercice AB.9

☐ ↻ Exercice AB.10

☐ ↻ Exercice AB.11

☐ ↻ Exercice AB.12

☐ ↻ Exercice AB.13

☐ ↻ Exercice AB.14

☐ ↻ Exercice AB.15

### III Formule de Taylor

On a vu dans le chapitre « polynômes » que l'on pouvait exprimer une fonction polynomiale par la connaissance des dérivées successives en un point avec la formule de Taylor. Si  $P$  est une fonction polynomiale de degré  $n$  et  $a$  un réel on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

L'idée est de généraliser cette approche pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ .

#### Propriété III.0.1 (Taylor avec reste intégral)

Soit  $a \in I$  et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Alors pour tout  $x \in I$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + R_n(x) \quad \text{avec} \quad R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Preuve

S12

EXEMPLE – Que donne cette formule pour  $n = 0$  : .....

Exercice AB.16

Exercice AB.17

## IV Sommes de Riemann

### ♪ Définition IV.0.1 (Sommes de Riemann)

Soit  $f \in \mathcal{C}[a, b], \mathbb{C}$ . Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on appelle somme de Riemann d'ordre  $n$  associée à  $f$  la somme :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

S13

REMARQUES –

- On utilise parfois la somme  $S'_n$  en sommant de  $k = 1$  à  $n$ ...

- Il paraît assez intuitif de concevoir que lorsque la valeur de  $n$  augmente, la somme de Riemann  $S_n(f)$  approxime de mieux en mieux l'intégrale de  $f$ . On dit qu'on approxime l'aire sous la courbe par la méthode des rectangles.

On peut énoncer le théorème suivant :

☺ **Théorème IV.0.2 (Convergence des sommes de Riemann)**

Soit  $f \in \mathcal{C}[a, b], \mathbb{K}$ , alors :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f$$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f$$

**Preuve**

La preuve de ce théorème pour les fonctions continues est hors-programme, mais on peut la faire pour les fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . Voir fiche exos. □

REMARQUES –

- La méthode qui consiste à approcher une intégrale par une somme de Riemann s'appelle la *méthode des rectangles* (on a approché l'aire globale par une somme d'aires de rectangles). Numériquement elle n'est pas très efficace (erreur à la louche en  $1/n$ ). Pour améliorer (un peu) cette technique on peut naturellement envisager des *trapèzes* à la place des rectangles. On obtiendra cette fois-ci une erreur de l'ordre de  $1/n^2$ . C'est pas mal, mais il existe encore bien mieux ;-)...
- On a aussi vu dans le chapitre *M* sur les équations différentielles la notion de **valeur moyenne d'une fonction** :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

On peut en avoir une interprétation géométrique avec les sommes de Riemann, puisque  $\mu$  serait la moyenne des  $f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$  pour  $k \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket$ .

□  Exercice AB.18

□  Exercice AB.19

□  Exercice AB.20

□  Exercice AB.21

□  Exercice AB.22