Planche AB
Intégration

☐ Exercice AB1 (Positivité stricte)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.
On suppose que $\displaystyle\int_{[0,1]} f = 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois.

☐ Exercice AB2 (Positivité stricte)

Soit $f(x) = \ln(1+\sin^3(x))$ définie sur $[0,\pi]$ et $I = \displaystyle\int_{[0,\pi]} f$. A-t-on $I < 0$, ou $I = 0$ ou $I > 0$?

☐ Exercice AB3 (Positivité stricte)

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$. Identifier f.

☐ Exercice AB4 (Théorème fondamental de l'analyse)

On définit la fonction f par : $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt$.

Q 1 Justifier rigoureusement le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$.

Q 2 Étudier le signe de f, ainsi que ses variations.

Q 3 Par encadrement, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Q 4 Dans le cas où $x \in]0,1]$, montrer rigoureusement que $f(x) \leqslant \ln x$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

Q 5 À l'aide de toutes les questions précédentes, représenter la courbe représentative de f (*en particulier, on tracera la tangente au point d'abscisse 1*)

☐ Exercice AB5 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit f définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. Justifier que f est dérivable et déterminer f'.

☐ Exercice AB6 (IPP)

Q 1 Avec deux intégrations par parties successives, déterminer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos^2(x)\mathrm{d}x$

Q 2 Calculer : $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(3x)\mathrm{d}x \qquad J = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \qquad K = \int_{-1}^0 x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Q 3 À l'aide d'une IPP, déterminer une primitive de $f_n : x \mapsto x^n \ln x$ (où $n \in \mathbb{N}$ est fixé).

Q 4 À l'aide d'une double IPP, calculer $K = \displaystyle\int_0^{\ln 2} x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

□ Exercice AB7 (IPP, suites)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $I_n = \int_0^1 t^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

Q 1 Démontrer que pour tout n on a : $I_n = e - nI_{n-1}$.

□ Exercice AB8 (Étudier une suite définie par une intégrale)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$

Q 1 Calculer u_0, u_1, u_2.

Q 2 Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante, puis que (u_n) converge.

Q 3 Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - 1| = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x^n}$. En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Q 4 **a.** Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$

b. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0$ (*on utilisera une majoration classique de ln*)

c. En déduire que $u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

□ Exercice AB9 (Changements de variable)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

Q 1 Si f est impaire, montrer à l'aide d'un changement de variable que F est paire.

Q 2 Si f est paire,montrer que F n'est pas nécessairement impaire.

Q 3 Si f est périodique, que pensez-vous de F ? Considérer par exemple $f(x) = \cos(x) + 1$ et conclure.

□ Exercice AB10 (Changements de variables)

Q 1 À l'aide du changement de variable $t = \mathrm{e}^x$, calculer $A = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$.

Q 2 Déterminer les primitives sur $]0, \pi[$ de $f : x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ en utilisant le changement "universel" $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
On rappelle les formules trigonométriques :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Q 3 En utilisant le changement $u = t + \frac{\pi}{2}$ en déduire les primitives sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ de $\frac{1}{\cos x}$.

□ Exercice AB11 (Changements de variable affines)

Q 1 On veut calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

– Effectuer le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$. En déduire que $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 \frac{t}{2}}$.

– Effectuer le changement de variable $u = \dfrac{t}{2}$. En déduire enfin la valeur de I.

Q 2 Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin x}$.

□ Exercice AB12 (Changement de variable affine)

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\mathrm{d}u$

□ Exercice AB13 (Changement de variable)

Après avoir mis l'expression $t^2 - 2t + 2$ sous forme canonique, effectuer un changement de variable pour calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-2t+2}\mathrm{d}t$

□ Exercice AB14 (Changement de variable)

Soit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ définie sur $[0;1]$.

Q 1 Poser $x = \sin t$ pour calculer $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Q 2 Vérifier que I est l'aire du quart de disque de rayon 1, puis retrouver la formule donnant l'aire d'un disque de rayon 1.

□ Exercice AB15 (Changement de variable)

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \,\mathrm{d}x$.

Q 1 Calculer $I + J$.

Q 2 En effectuant un changement de variable affine, montrer que $I = J$ puis en déduire leur valeur.

□ Exercice AB16 (Taylor)

Q 1 Appliquer l'égalité de Taylor avec reste intégral (ordre $n = 1$) à la fonction cosinus pour montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Q 2 Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\mathrm{d}t$$

□ Exercice AB17 (Taylor)

Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$

☐ Exercice AB18 (Sommes de Riemann)

Démonstration du théorème de la convergence des sommes de Riemann dans le cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur une segment $[a, b]$.

☐ Exercice AB19 (Sommes de Riemann)

Donner la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$

☐ Exercice AB20 (Sommes de Riemann)

Soit $\alpha \geqslant 0$. En utilisant la somme de Riemann de la fonction $f(x) = x^\alpha$ entre 0 et 1, donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $S_\alpha(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$

☐ Exercice AB21 (Sommes de Riemann)

Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}}$.

☐ Exercice AB22 (Sommes de Riemann)

Soit $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{e}^{k/n}$. Montrer que $v_n \sim n^2$.