

INTERROGATION N°2 (30')

À noter : on rappelle l'importance de faire une bonne rédaction, bien détaillée.

Q 1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 - 2x + 6 \geq 1 - 4x$.

► Réponse :

On calcule la soustraction des deux membres :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 6 - (1 - 4x) &= x^2 - 2x + 6 - 1 + 4x \\ &= x^2 + 2x + 5 \\ &= (x + 1)^2 + 4 > 0 \end{aligned}$$

On déduit alors que : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 6 \geq 1 - 4x$

Q 2 Résoudre dans $\mathbb{R} - \{2\}$: $\frac{3x}{2-x} < 5x$.

► Réponse :

On confirme les valeurs interdites : $2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

On peut faire une disjonction de cas, ou bien se ramener à une étude de signe. Rédigeons cette dernière méthode :

$$\frac{3x}{2-x} - 5x < 0 \Leftrightarrow \frac{3x - 5x(2-x)}{2-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-7x + 5x^2}{2-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(5x-7)}{2-x} < 0$$

Ensuite on conclut avec un tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$\frac{7}{5}$	2	$+\infty$
x	-	0	+	+	+
5x - 7	-	-	0	+	+
2 - x	+	+	+	0	-
f(x)	+	0	-	0	+

On déduit alors les solutions : $x \in]0; \frac{7}{5}[\cup]2; +\infty[$

Q 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x - 3| > 3 + |2x + 4|$

► Réponse :

Étape 1 : on commence par chercher les points où les expressions dans les valeurs absolues changent de signe et on reporte ces résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x - 3$	$-$	$-$	0	$+$
$2x + 4$	$-$	0	$+$	$+$

Étape 2 : on étudie l'inéquation dans chacun des 3 intervalles :

$$I_1 =]-\infty; -2[, \quad I_2 = [-2; 3] \text{ et } I_3 =]3; +\infty[$$

- Cas 1 : si $x \in I_1$, alors l'inéquation devient :

$$|x - 3| > 3 + |2x + 4| \iff -(x - 3) > 3 - (2x + 4) \iff -x + 3 > -1 - 2x \iff x > -4$$

Les solutions sur I_1 sont alors $x \in I_1 \cap]-4; +\infty[$ donc $S_1 =]-4; -2[$.

- Cas 2 : si $x \in I_2$, alors l'inéquation devient :

$$|x - 3| > 3 + |2x + 4| \iff -(x - 3) > 3 + (2x + 4) \iff -x + 3 > 7 + 2x \iff -3x > 4 \iff x < -\frac{4}{3}$$

Les solutions sur I_2 sont alors $x \in I_2 \cap]-\infty; -\frac{4}{3}[$ donc $S_2 = \left[-2; -\frac{4}{3}\right[$.

- Cas 3 : si $x \in I_3$, alors l'inéquation devient :

$$|x - 3| > 3 + |2x + 4| \iff (x - 3) > 3 + (2x + 4) \iff x - 3 > 7 + 2x \iff -x > 10 \iff x < -10$$

Les solutions sur I_3 sont alors $x \in I_3 \cap]-\infty; -10[$ donc $S_3 = \emptyset$.

Étape 3 conclusion : on rassemble les solutions trouvées dans chaque intervalle : $S = \left[-4; -\frac{4}{3}\right]$.

Q 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x + 1| \leq |x - 2|$

► Réponse :

Le plus rapide est d'utiliser les distances :

$$|x + 1| \leq |x - 2| \iff d(x, -1) \leq d(x, 2)$$

C'est-à-dire que x est plus proche de -1 que de 2 .

Le point milieu de $[-1; 2]$ est $\frac{1}{2}$. On en déduit que :

$$|x + 1| \leq |x - 2| \iff x \leq \frac{1}{2}$$