CHAPITRE

$\mathcal{J}$

√MATH

TSI[1]

Lycée Artaud

2025/2026

Études de fonctions

Introduction

La notion de fonction en tant que correspondance entre deux types d'objets est relativement ancienne. Dans *Géométrie* en 1637, Descartes produit les premières études de courbes. Mais le terme *fonction* n'apparaît que sous la plume de Leibniz en 1695, comme associée à une courbe géométrique. Dans la même époque, Newton parle de *fluente* pour des quantités dépendant d'une variable qu'il appelle le temps (tout en précisant que le rôle joué par le temps, peut l'être par une autre quantité).

Sommaire

I Notion de fonction **2**
- I.1 Définition . . . 2
- I.2 Représentation graphique . . . 2
- I.3 Opérations sur les fonctions . . . 2
- I.4 Fonctions paires, impaires, périodiques . . . 3
- I.5 Fonctions majorées, minorées, bornées . . . 4
- I.6 Monotonie . . . 4
- I.7 Comportement asymptotique . . . 6

II Dérivation **6**
- II.1 Dérivée en un point, tangente . . . 6
- II.2 Dérivée sur un intervalle . . . 6
  - II.2.1 Rappel des formules usuelles . . . 6
  - II.2.2 Dérivée d'une composée . . . 7
  - II.2.3 Dérivée en cinématique . . . 8
- II.3 Fonction dérivable, étude des variations . . . 8

III Fonction réciproque **9**
- III.1 Notion de bijection . . . 9
- III.2 Fonction réciproque . . . 10
- III.3 Étude des fonctions réciproques . . . 11

I Notion de fonction

I.1 Définition

Définition I.1.1 (Dirichlet, 1837)

Une fonction f est définie :

- par un sous-ensemble $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ (en général, intervalle ou réunion d'intervalles), appelé « *ensemble de définition* » ;
- un "procédé" de calcul qui, à tout x de I, associe un unique y noté $f(x)$.

On cela résume par le **schéma fonctionnel** : $\begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ et on note $f \in \mathscr{F}(\mathscr{D}, \mathbb{R})$.

Il est toujours juste de mettre $\mathbb{R}$ par défaut à l'arrivée, bien que l'ensemble d'arrivée puisse être strictement inclus dans $\mathbb{R}$.

☐ ✍ **Exercice J.1**

I.2 Représentation graphique

On considère une fonction f : $\begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Pour concrétiser la notion abstraite de fonction, on définit son **graphe** ou **représentation graphique** dans un repère orthonormé direct : c'est l'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x \in \mathscr{D}$.

Il est intéressant de savoir traduire algébriquement des transformations géométriques élémentaires effectuées sur une représentation graphique, telles que **translations, symétries et dilatations**.
Si f est une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ et k un réel, on retiendra les transformations suivantes :

Expression de g	**Transformation géométrique de $\mathscr{C}_f$ à $\mathscr{C}_g$**
$x \mapsto f(x) + k$	....
$x \mapsto f(x + k)$	....
$x \mapsto f(k - x)$	....
$x \mapsto f(kx)$	Affinité de rapport $\frac{1}{k}$ suivant $\vec{\imath}$
$x \mapsto kf(x)$	Affinité de rapport k suivant $\vec{\jmath}$

☐ ✍ **Exercice J.2** ☐ ✍ **Exercice J.3** ☐ ✍ **Exercice J.4**

I.3 Opérations sur les fonctions

Définition I.3.1 (Sommes, produits)

Soit I et J deux intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

- On définit sur $I \cap J$ la *nouvelle* fonction : $(f + g) : x \mapsto f(x) + g(x)$, de telle sorte que :

$$\forall x \in I \cap J, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- De même pour le produit fg, ou la division f/g, *à condition que g ne s'annule pas.*

♪ Définition I.3.2 (Composition)

Si $f(I) \subset J$, alors on peut définir la composée de f par g, notée $g \circ f$:

$$g \circ f \;:\; \begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{f} & \boxed{J} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Exemple – Donner les ensembles de définition des fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x - 2$, puis donner les expressions de $f \circ g$ et de $g \circ f$ ainsi que leurs ensembles de définitions.

S1

☐ ✍ **Exercice J.5** ☐ ✍ **Exercice J.6**

I.4 Fonctions paires, impaires, périodiques

♪ Définition I.4.1

- Une fonction f est dite **paire** (respectivement **impaire**) lorsque :
  - son ensemble de définition $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à 0,
  - et si pour tout x dans $\mathscr{D}$, $\quad f(-x) = f(x) \quad$ (respectivement $f(-x) = -f(x)$).
- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit qu'elle est **périodique** s'il existe un réel T tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

  On appelle **période de** f le plus petit réel $T > 0$ qui convienne.

Exemple – Donner des fonctions pour illustrer cette définition…

S2

Remarques – On retiendra géométriquement :

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
- La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport au point O centre du repère.
- Si la fonction est impaire et de plus existe en 0, alors $f(0) = 0$.

☐ ✍ **Exercice J.7**

I.5 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition I.5.1

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$.

- On dit f est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : ....
- On dit f est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : ....
- On dit que f est **bornée** s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : ....

Remarques –

- Si M est un majorant, alors tout nombre supérieur à M est aussi majorant.
- Si m est un minorant, alors tout nombre inférieur à m est aussi minorant.
- Lorsque le majorant est atteint, on parle de **maximum**.
- Lorsque le minorant est atteint, on parle de **minimum**.
- On appelle **extremum**, un maximum ou un minimum.
- On montrera en TD qu'une fonction est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

Exemple – Faire un croquis faisant apparaitre les notions de maximum global, maximum local et majorant :

S3

☐ ✍ **Exercice J.8** ainsi que le TD « Extremums… »

I.6 Monotonie

Définition I.6.1 (fonctions croissantes, fonctions décroissantes)

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f est **croissante** sur $\mathscr{D}$ si :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathscr{D}, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

- On dit que f est **décroissante** sur $\mathscr{D}$ si :

....

Olivier BRÉBANT
Lycée Artaud – 2025/2026

♪ Définition I.6.2 (fonctions strictement croissantes, fonctions strictement décroissantes)

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f est **strictement croissante** sur $\mathscr{D}$ si :

  ....

- On dit que f est **strictement décroissante** sur $\mathscr{D}$ si :

  ....

♪ Définition I.6.3 (Monotonie)

Une fonction est dite **monotone** lorsque qu'elle est soit croissante, soit décroissante.

Propriété I.6.4 (Variations successives)

Considérons deux fonctions f et g *monotones* telles que $f \circ g$ soit définie. Alors :

- Si f et g ont même sens de variations, alors $f \circ g$ est croissante.
- Si f et g ont des sens de variations différents, alors $f \circ g$ est décroissante.

REMARQUES –

- Soit $u : I \to \mathbb{R}^+$. Alors les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations. On utilisera souvent cette remarque en physique : pour minimiser une fonction racine, il suffit de minimiser son carré.
- **Attention :** u et u^2 n'ont les mêmes variations que si $u \geqslant 0$.
- Dans le cas où les fonctions sont non monotones, montrons que la réciproque n'est pas vraie, c'est à dire par exemple que l'on peut avoir $f \circ g$ croissante avec f et g qui ne ne sont ni croissantes ni décroissantes :
  Prenons $f(x) = |x|$ et $g(x) = -x - 1$ pour $x \in [-1\,;0]$ et $g(x) = 1 + x$ pour $x \in [0\,;1]$.
  On a $f \circ g(x) = 1 + x$. Ainsi $f \circ g$ est croissante, mais f et g changent de variations. Dessin :

  S4

☐ ✍ **Exercice J.9**

I.7 Comportement asymptotique

♪ Définition I.7.1

Soit k un réel, et f une fonction.

- Si $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = k$ on dit que la droite d'équation $y = k$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.
- Même chose avec $-\infty$
- Si $\lim\limits_{x \mapsto k} f(x) = \pm\infty$ on dit que la droite d'équation $x = k$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f au voisinage de k.

☐ ✍ **Exercice J.10**

II Dérivation

II.1 Dérivée en un point, tangente

♪ Définition II.1.1 (Dérivée en un point)

Une fonction f est dite dérivable en un point $a \in I$ lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet **une limite finie** lorsque x tend vers a. On note $f'(a)$ cette limite.

Propriété II.1.2 (Tangente)

Si f est dérivable en $a \in I$, alors :

- le nombre $f'(a)$ représente le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point sd'abscisse a (on parle aussi de *pente*).
- L'équation de cette tangente est : $\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$
- La fonction affine définie par $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ est la meilleure approximation affine de la fonction f au voisinage de a.

☐ ✍ **Exercice J.11** ainsi que le TD « approximation affine »

II.2 Dérivée sur un intervalle

II.2.1 Rappel des formules usuelles

♪ Définition II.2.1

f est dite dérivable sur l'intervalle I si, f est dérivable en tout point $a \in I$.

Exemple –
Donner des exemples de fonctions qui ne sont pas dérivables sur la totalité de leur ensemble de définition.

S5

Propriété II.2.2 (admise)

- Toutes les fonctions usuelles (polynômes, trigo, exp, log) sont dérivables sur leur ensemble de définition.
- Toute opération (somme, produit, composée) de fonctions dérivables est dérivable.

Exemple – Rappeler les formules de dérivation pour les 4 opérations usuelles :

S6

II.2.2 Dérivée d'une composée

Propriété II.2.3

Soit $u : I \to J$ et $v : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables respectivement sur I et J, alors leur composée $v \circ u$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I \quad (v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

autrement dit :

$$\boxed{(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)}$$

Exemple – Formules pour u^n avec $n \in \mathbb{N}$, u^n avec $n \in \mathbb{Z}^-$, $\sqrt[n]{u} = u^{1/n}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{e}^u)'$, $(\ln u)'$, $(\cos u)'$...

S7

☐ ✍ **Exercice J.12**

II.2.3 Dérivée en cinématique

- **Notation différentielle** : la définition de la dérivée équivaut à : $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
  Les physiciens notent souvent Δx une variation de x, ici h. De même $\Delta f = f(x+h) - f(x)$.
  Lorsque Δx tend vers 0, les physiciens notent cette différence : dx, appelée "variation infinitésimale".
  Ainsi, $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, ou encore : $f'(x) = \dfrac{df}{dx}(x)$.
- Soit M un point mobile. Soit $f(t)$ sa distance parcourue au temps t.
  - Si f est dérivable, alors on définit la fonction **vitesse** par : $v(t) = f'(t) = \dfrac{df}{dt}$.
  - Si f' est dérivable, alors on définit sa dérivée comme la fonction **accélération** : $a(t) = f''(t)$, notée $\dfrac{d^2 f}{dt^2}$.
- **Dérivées partielles** : lorsqu'une fonction f dépend de deux variables x et y, on définit, si elles existent, les dérivées partielles :

  $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: dérivée de f par rapport à x, à y fixé. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$: dérivée de f par rapport à y, à x fixé.

II.3 Fonction dérivable, étude des variations

L'outil « dérivation » permet de faciliter grandement l'étude du sens de variations de fonctions. Si on se rappelle que le nombre dérivé représente le coefficient directeur de la tangente, on conçoit sans difficulté la propriété suivante rencontrée au lycée :

Propriété II.3.1 (sens de variation)

Si f est une fonction dérivable sur I :

- Si pout tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I.
  Raffinement : si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ mais ne s'annule qu'en un nombre fini de point, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ alors f est décroissante sur I.
  Raffinement : si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ mais ne s'annule qu'en un nombre fini de point, alors f est strictement décroissante sur I.

Obtenir les variations d'une fonction est déjà une information intéressante, mais on peut aussi citer deux applications classiques :

- Recherche d'extremas (problèmes d'optimisation)
- Résolution d'inéquation par l'étude du signe d'une fonction (mais comme déjà évoqué, après avoir testé des techniques algébriques de factorisation !)

Plan d'étude d'une fonction :

1. déterminer son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$,
2. étudier sa parité et sa périodicité pour réduire le cas échéant le domaine d'étude,
3. déterminer les variations de f et les récapituler dans un tableau de variations,
4. déterminer les limites éventuelles de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$,

5. construire une ébauche de sa représentation graphique. Ce dernier point induit des études complémentaires sur la fonction pour pouvoir « affiner » le tracé de $\mathscr{C}_f$:

   - étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à quelques tangentes,
   - identifier les asymptotes horizontales ou verticales.

☐ ✍ **Exercice J.13** ☐ ✍ **Exercice J.14** ☐ ✍ **Exercice J.15** ☐ ✍ **Exercice J.16**
☐ ✍ **Exercice J.17** ☐ ✍ **Exercice J.18**

III Fonction réciproque

III.1 Notion de bijection

Définition III.1.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J. On dit que :

- f est **surjective** de I sur J lorsque tout y de J admet *au moins* un antécédent x par f.
- f est **injective** de I sur J lorsque tout y de J admet *au plus* un antécédent x par f.
- **f réalise une bijection de I sur J lorsque tout y de J admet un unique antécédent x par f.**

EXEMPLE –

- Que peut-on dire avec $f : x \mapsto x^2$? (envisager plusieurs ensembles départ/arrivée différents)

  S8

- Traduire ces définitions avec des quantificateurs :

  S9

REMARQUES –

- pour que f soit bijective, il faut que $J = f(I)$. Cette condition est *nécessaire* à la bijectivité (elle assure la surjectivité), mais elle est *non suffisante*.

- Voici 4 façons légèrement différentes de caractériser la bijectivité d'une fonction $f : I \to J$:
  1. La fonction f est surjective et injective,
  2. Tout élément de J possède un et un seul antécédent dans I,
  3. Pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution dans I,
  4. On a : $\forall y \in J \quad \exists! x \in I \quad y = f(x)$.

Propriété III.1.2

Si f est strictement monotone sur I, alors elle réalise une bijection de I sur $J = f(I)$.

Preuve : utilisons les quantificateurs, en distinguant existence et unicité.

S10

Attention ! – Justifier par un contre-exemple géométrique que la réciproque est fausse.

S11

III.2 Fonction réciproque

Définition III.2.1

Soit $f : I \to J$ une fonction *bijective*. On définit sa **fonction réciproque** notée f^{-1}, par :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & I \\ y & \mapsto & x \end{array} \quad \text{où } y = f(x)$$

Ainsi : $\boxed{y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x}$

Exemple –

- La fonction carrée définie sur $\mathbb{R}^+$ et la racine carrée sont réciproques l'une de l'autre.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, et la fonction racine n-ième : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. On rappelle que $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.
- La fonction inverse est sa propre réciproque.

- Une exemple un peu plus technique : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. Justifier que pour $y < 1$, $y = f(x) \iff x = \pm\sqrt{\frac{1}{1-y}}$:

S12

La présence de 2 antécédents permet de dire que f ne réalise pas de bijection de $\mathbb{R}^*$ dans $]-\infty\,;1[$.

Par contre, si on restreint f sur $\mathbb{R}^{+*}$, alors la nouvelle fonction $g = f_{|\mathbb{R}^{+*}}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $]-\infty, 1[$ et $g^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{1-y}}$.

De même, si on restreint f sur $\mathbb{R}^{-*}$, alors $h = f_{/\mathbb{R}^{-*}}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{-*}$ vers $]-\infty, 1[$ et $h^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{1}{1-y}}$.

- Gros problème : il est facile de voir que la fonction $x \mapsto x^3 + x + 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ (pourquoi ?), mais on ne peut pas expliciter la réciproque...

III.3 Étude des fonctions réciproques

Propriété III.3.1 (admise)

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective.
Si f est monotone sur I, alors f^{-1} a le même sens de variation que f sur J.
De plus, leurs courbes représentatives dans RON sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

EXEMPLE – On a ainsi une approximation du comportement de la réciproque de $x \mapsto x^3 + x + 1$:

S13

Propriété III.3.2 (dérivée)

Soit $f : I \to J$ bijective. Si f est dérivable sur I et si f' *ne s'annule pas* sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et

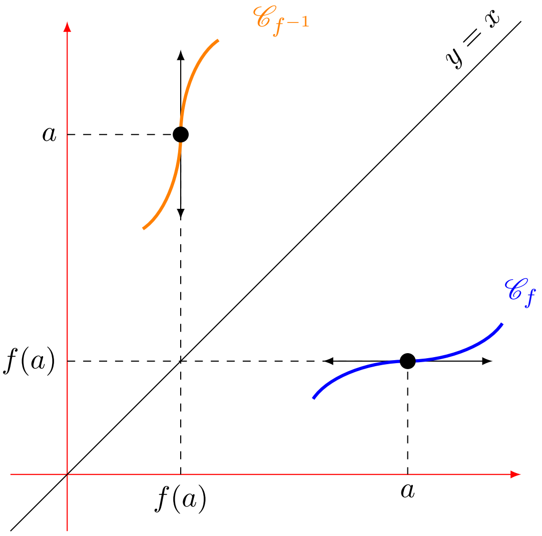
$$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}} \qquad \text{ou encore} \qquad \boxed{\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}}$$

Comment retrouver cette dernière formule ?

On part de $f \circ f^{-1}(y) = y$, vraie pour tout y de J. Alors en dérivant l'égalité précédente à l'aide de la formule de composition, $(f^{-1})'(y) \times f'(f^{-1}(y)) = 1$, ce qui donne finalement $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

REMARQUES –

- $(f^{-1})'$ est du signe de f', on retrouve donc que f^{-1} et f ont les mêmes variations.
- Graphiquement, on comprend pourquoi l'annulation de f' engendre la non dérivabilité de f^{-1} par l'observation des tangentes.



☐ ✍ **Exercice J.19** ☐ ✍ **Exercice J.20** ☐ ✍ **Exercice J.21** ☐ ✍ **Exercice J.22**
☐ ✍ **Exercice J.23** ☐ ✍ **Exercice J.24** ☐ ✍ **Exercice J.25**