CHAPITRE

$\mathscr{N}$

TSI[1]

Lycée Artaud

2025/2026

Ensembles, applications/fonctions

Sommaire

I Quelques notions sur les ensembles

On ne fera pas de théorie complète sur les ensembles car cela nous mènerait trop loin, mais on va voir au travers d'exemples comment se familiariser avec cette notion fondamentale en mathématiques et comment les manipuler.

I.1 Ensemble vide

Par soucis d'homogénéité dans les formules, on admettra qu'il existe un unique ensemble, appelé **ensemble vide** qui ne comporte aucun élément. Pour toute phrase $P(x)$ dépendant de x on a :

- l'assertion « $\exists x \in \varnothing \quad P(x)$ » est toujours fausse,
- l'assertion « $\forall x \in \varnothing \quad P(x)$ » est toujours vraie,
- pour tout ensemble E on a $\varnothing \subset E$.

I.2 Inclusion, égalité

Définition I.2.1

Soit E et F deux ensembles.

- On dit que E est **inclus** dans F, ou que E est une partie de F et on note $E \subset F$ lorsque :

$$\forall x \in E, \quad x \in F \quad \textit{(Ce qui signifie : pour tout } x\textit{, si } x \in E \textit{ alors } x \in F\textit{)}$$

- On a $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Exemple (I.2.2)

- Écrire la signification de $E \not\subset F$ qui veut dire E n'est pas inclus dans F.

S1

- Écrire la signification de $E \neq F$.

S2

I.3 Ensemble défini par un *prédicat*

La définition d'un ensemble à partir d'un prédicat (d'une relation) $P(x)$ dépendant de x s'écrit ainsi :

$$S = \{x \in E \ / P(x)\}$$

Exemple (I.3.1)

1. On considère une fonction $f : \mathscr{D} \mapsto \mathbb{R}$.
Écrire mathématiquement la phrase « S est l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ »

S3

2. Écrire ensuite à l'aide de l'ensemble S les phrases :

- P_1 : x_1 et x_2 sont *les* solutions de l'équation $f(x) = 0$
- P_2 : x_1 et x_2 sont (*des*) solutions de l'équation $f(x) = 0$

S4

3. Résoudre l'équation $(E) : x = \sqrt{x+2}$ par condition nécessaire/suffisante et utiliser la notation d'ensemble pour présenter les solutions.

S5

☐ ✍ **Exercice N.1**

I.4 Différence, complémentaire

Définition I.4.1

Soit E et F deux ensembles.

- On appelle **différence** E privé de F l'ensemble noté $E\backslash F$ des éléments de E qui ne sont pas dans F :
$$x \in E\backslash F \iff (x \in E \text{ et } x \notin F)$$
- Lorsque $F \subset E$ l'ensemble $E\backslash F$ s'appelle le **complémentaire** de F dans E et se note $\complement_E F$.
- On note souvent $\overline{F}$ l'ensemble de tous les éléments qui ne sont pas dans F.

Remarques – Soit A et B deux sous-ensembles de E. **Rayer la formule fausse** :

$$\boxed{A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}} \qquad \boxed{A \subset B \implies \overline{B} \subset \overline{A}}$$

I.5 Union et intersection

Définition I.5.1

Soit E et F deux ensembles.

- $E \cap F$ s'appelle l'**intersection** des ensembles E et F, et représente l'ensemble des éléments à la fois dans E et dans F :
$$\boxed{x \in E \cap F \iff (x \in E \text{ et } x \in F)}$$
- $E \cup F$ s'appelle la **réunion** des ensembles E et F, et représente l'ensemble des éléments dans E

ou dans F :

$$\boxed{x \in E \cup F \iff (x \in E \text{ ou } x \in F)}$$

(On rappelle que le « ou » est inclusif en mathématiques...)

REMARQUES – On a :

- Associativité : $\boxed{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$ et $\boxed{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$
- Distributivité : $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$ et $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}(\star)$
- Complémentaire :
  - $\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$ et $\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}(\star\star)$
  - On a clairement : $\boxed{E \backslash F = E \cap \overline{F}}$
- 2 équivalences :

$$\boxed{A \subset B \overset{①}{\iff} A \cup B = B \overset{②}{\iff} A \cap B = A}$$

Illustrer par des figures la relation de distributivité $(\star)$:

S6

Illustrer par des figures la relation du complémentaire $(\star\star)$:

S7

Démontrer avec soin par exemple l'équivalence ① :

S8

☐ ✍ **Exercice N.2**

I.6 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition I.6.1

Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E se note $\mathscr{P}(E)$, et vérifie :

$$F \in \mathscr{P}(E) \iff F \subset E \quad \text{c'est à dire : } \mathscr{P}(E) = \{F \ / \ F \subset E\}$$

Exemple (I.6.2)

Soit $E = \{1, 2\}$. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ *(Pour ne rien oublier, énumérons-les en fonction de leur nombre d'éléments... qui commence à 0 !)*

S9

REMARQUES – On fera attention aux notations :
Par exemple, si $E = \{1, 2\}$, cocher les écritures correctes et rayer les fausses :

☐ $1 \in E$ ☐ $1 \subset E$ ☐ $\{1\} \in \mathscr{P}(E)$ ☐ $\{1\} \subset \mathscr{P}(E)$ ☐ $\{\{1\}\} \subset \mathscr{P}(E)$ ☐ $\{1\} \subset E$

☐ ✍ **Exercice N.3**

I.7 Produit cartésien

Définition I.7.1

Soit E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F, est l'ensemble noté $E \times F$, des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \{(x, y) \ / \ x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Exemple (I.7.2)

Soit $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$. Que vaut $E \times F$?

S10

ATTENTION ! – Ne pas confondre un couple et un ensemble. Écrire V ou F dans la case lorsque l'écriture est vraie ou fausse :

- On suppose $x \neq y$:

  ☐ $(x, y) = (y, x)$ ☐ $\{x, y\} = \{y, x\}$ ☐ $\{x, y\} = \{x\}$ ☐ $(x, y) = (x, x)$

- On suppose $x = y$:

  ☐ $(x, y) = (y, x)$ ☐ $\{x, y\} = \{y, x\}$ ☐ $\{x, y\} = \{x\}$ ☐ $(x, y) = (x, x)$

☐ ✍ **Exercice N.4**

II Application, fonctions

II.1 Généralités

II.1.1 Vocabulaire

♪ Définition II.1.1 (Application)

Une **application** f de E dans F est un protocole qui à tout élément x de E associe un unique élément $f(x)$ de F appelé image de x par f.
E est appelé **ensemble de départ**, F **ensemble d'arrivée**.
On écrit :

$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

On appelle *graphe* (ou représentation graphique) de f la partie de $E \times F$ égale à $\{(x, f(x))/x \in E\}$.
Notation : l'ensemble des applications de E dans F se note $\boxed{\mathscr{F}(E, F)}$, ou encore $\boxed{F^E}$.

Remarques –

- On verra une explication de la notation F^E dans le chapitre consacré au dénombrement.
- Deux **applications** $u : E \to F$ **et** $v : E' \to F'$ **sont égales** si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées :

  (i) ....
  (ii) ....
  (iii) ....

♪ Définition II.1.2 (Antécédent)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, et y un élément de F. On appelle **antécédent** de y par f tout élément x de E dont l'image est y.
L'ensemble des antécédents de y est donc : $\{x \in E/f(x) = y\}$, il se note $f^{-1}(\{y\})$. Cet ensemble peut être l'ensemble vide.

Remarques – Il faut distinguer l'écriture $f^{-1}(y)$ rencontrée dans le chapitre sur les fonctions réciproques (chp J) qui n'avait de sens que si f était bijective, avec $f^{-1}(\{y\})$ qui est toujours valable. La première donne l'unique antécédent de y par f, alors que la deuxième donne l'ensemble des antécédents éventuels de y par f (cet ensemble peut être l'ensemble vide).

♪ Définition II.1.3 (Images directes et réciproques)

Plus généralement si f est une application $f : E \to F$, pour tout $A \subset E$ et $B \subset F$ on appelle :

- **image directe** de A par f l'ensemble : $f(A) = \{f(x) \in F \ / \ x \in A\}$,
- **image réciproque** de B par f l'ensemble : $f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\}$.

Remarques – En python, la notion de liste créée par *comprehension* découle directement de la notion mathématique d'ensemble image. Par exemple si f est une fonction et que E est un ensemble fini et itérable (c'est à dire parcourable à l'aide d'une boucle for), alors on peut obtenir l'ensemble $f(E)$, image de E par f grâce à la syntaxe :

- En math : $f(E)=\{f(x)\ /\ x\in E\}$
- En python : images = [f(x) for x in E]

♪ Définition II.1.4 (Restrictions, prolongements)

Soit u une application de E dans F.

- Si E' un sous-ensemble de E, la restriction de u à E', notée $u_{/E'}$, est l'application de E' dans F telle que : $\forall x\in E', u_{/E'}(x)=u(x)$.
- Si E'' est un ensemble contenant E, on appelle prolongement de u sur E'' toute application v de E'' dans F telle que $v_{/E}=u$.

II.1.2 Composition

On a déjà rencontré cette notion pour des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, cela se généralise à des applications quelconques :

♪ Définition II.1.5 (Composée)

Soit $f: E\longrightarrow F$ et $g: F\longrightarrow G$ deux applications, l'application $x\in E\mapsto g(f(x))$, de E dans G est appelée **composée** des applications f et g ; on la note $g\circ f$.

Attention ! – Ici, à cause des ensembles, $f\circ g$ n'a pas de sens ! Et si dans le cas où elle aurait du sens, en général elle n'est pas égale à $g\circ f$.

Propriété II.1.6 (Associativité)

Si $f: E\longrightarrow F$, $g: F\longrightarrow G$, $h: G\longrightarrow H$ alors on a : $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$

☐ ✍ **Exercice N.5** ☐ ✍ **Exercice N.6** ☐ ✍ **Exercice N.7** ☐ ✍ **Exercice N.8** ☐ ✍ **Exercice N.9**

II.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

On a déjà rencontré brièvement ces notions dans le cas particulier des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (chapitre sur les études de fonctions). On va s'y attarder un peu plus ici en généralisant ces notions pour des fonctions de E dans F quelconques.

II.2.1 Injectivité

♪ Définition II.2.1 (Injectivité)

Soit $f\in\mathscr{F}(E,F)$. On dit qu'elle est **injective** si elle vérifie l'une des deux assertions équivalentes suivantes :

- Tout élément de F admet **au plus** un antécédent par f.
- On a : $\forall(x_1,x_2)\in E^2,\ f(x_1)=f(x_2)\implies x_1=x_2$.

Écrire la contraposée et la négation de la deuxième assertion :

S11

REMARQUES – On peut caractériser l'injectivité par un vocabulaire sur les équations :
Considérons une application f de E dans F et un élément $m \in F$:

f est **injective** si et seulement si l'équation $f(x) = m$ admet ....

EXEMPLE – On peut visualiser une application injective par un diagramme sagittal comme celui-ci :

S12

Exemple (II.2.2)

Rappel : si E est une partie de $\mathbb{R}$, et si f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, strictement monotone sur E, alors f est injective. Visualiser cela sur un graphique (revoir la démo dans le chapitre sur les études de fonctions).

S13

☐ ✍ **Exercice N.10**

Propriété II.2.3

La composée de deux applications injectives est injective.

Preuve

S14

□

II.2.2 Surjectivité

♪ Définition II.2.4 (Surjectivité)

Soit $f \in \mathscr{F}(E, F)$. On dit qu'elle est **surjective** si elle vérifie l'une des deux assertions équivalentes suivantes :

- Tout élément de F admet **au moins** un antécédent par f.
- On a : $\forall y \in F,\ \exists x \in E\ y = f(x)$.

REMARQUES – On peut caractériser la surjectivité par un vocabulaire sur les équations :
Considérons une application f de E dans F et un élément $m \in F$:

f est surjective si et seulement si l'équation $f(x) = m$ admet ....

Exemple (II.2.5)

Donner une fonction surjective, puis une fonction non surjective :

S15

EXEMPLE – Dessiner un diagramme sagittal pour imager une fonction surjective :

S16

□ ✍ **Exercice N.11**

Propriété II.2.6

La composée de deux applications surjectives est surjective.

Preuve

S17

□

II.2.3 Bijectivité

Définition II.2.7 (Bijectivité)

Soit $f \in \mathscr{F}(E, F)$. On dit qu'elle est **bijective** si elle vérifie l'une des trois assertions équivalentes suivantes :

- f est à la fois injective et surjective,
- Tout élément de F a un et un seul antécédent par f,
- On a : $\forall y \in F,\ \exists! x \in E \quad y = f(x)$.

Exemple (II.2.8)

Illustrer par un diagramme sagittal une application bijective :

S18

□ ✍ **Exercice N.12** □ ✍ **Exercice N.13** □ ✍ **Exercice N.14** □ ✍ **Exercice N.15** □ ✍ **Exercice N.16**

II.3 Application réciproque

On va ici aussi généraliser à des applications quelconques ce que l'on a déjà vu sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

♪ Définition II.3.1 (réciproque)

Soit f une **application bijective** de E dans F. Alors l'application de F dans E qui à tout $y \in F$ associe son unique antécédent par f s'appelle **application réciproque** de f et se note f^{-1}.

Exemple (II.3.2)

Rappeler les fonctions réciproques de $f_1 : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}^+$, et de $f_2 : x \in \mathbb{R}^- \mapsto x^2 \in \mathbb{R}^+$:

S19

Exemple (II.3.3)

Rappeler les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction arcsin puis donner sa fonction réciproque :

S20

Propriété II.3.4 (Caractérisation de la bijectivité)

Considérons deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$.
On a $f \circ g = Id_F$ **et** $g \circ f = Id_E$ si et seulement si f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Preuve

Un peu lourde, on l'admettra... □

Attention ! – On a besoin de vérifier que les deux compositions valent l'identité pour obtenir la bijectivité. Essayer de s'en convaincre à l'aide des fonctions carrées et racines carrées...

S21

Propriété II.3.5 (Corollaires)

- Si f est bijective alors f^{-1} aussi et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$
- Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont bijectives, alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ aussi et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ *(Attention à l'ordre !)*

☐ ✍ **Exercice N.17**

Quelques exos de plus : ☐ ✍ **Exercice N.18** ☐ ✍ **Exercice N.19** ☐ ✍ **Exercice N.20**