CHAPITRE

$\mathscr{P}$

TSI[1]

Lycée Artaud

2024/2025

Géométrie dans l'espace

Sommaire

I Repérage dans l'espace et produits de vecteurs

I.1 Coordonnées cartésiennes

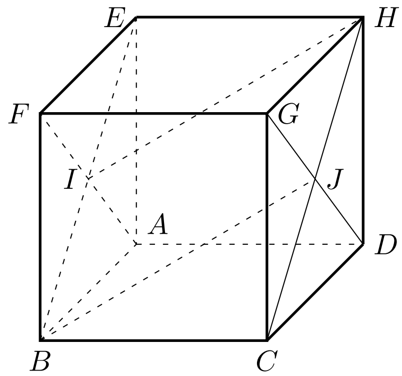
Définition I.1.1

Un repère de l'espace noté $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est un quadruplet, formé d'un point et de trois vecteurs non coplanaires. On dit qu'il est orthonormé si les vecteurs forment deux à deux des angles droits et sont de même norme.

Remarques – Il existe aussi un repérage possible par des coordonnées cylindriques ou sphériques que vous utilisez en physique et SI, mais ce n'est pas au programme de mathématiques cette année.

Exemple (I.1.2)

On considère le cube ci-dessous où les points I et J sont les milieux des faces $ABFE$ et $DCGH$.



Q 1 En introduisant un repère, démontrer que les droites (IH) et (BJ) sont parallèles.

S1

Q 2 Donner des exemples d'une famille libre de 2 vecteurs (vecteurs non colinéaires), d'une famille libre de 3 vecteurs (vecteurs non coplanaires), d'une famille liée de 3 vecteurs :

S2

☐ ✍ Exercice P.1

Olivier BRÉBANT
Lycée Artaud – 2024/2025

I.2 Produit scalaire dans l'espace

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace, on peut déterminer *au signe près* une mesure θ de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en se plaçant dans le plan formé par ces deux vecteurs. Pour le signe, cela dépend de l'orientation de ce plan (c'est à dire, cela dépend de quel côté on regarde...). Remarquons que la fonction cos est paire, et par conséquent le signe nous importe peu ici puisque $\cos\theta = \cos(-\theta)$. On peut donc définir le produit scalaire comme dans le plan par :

♪ Définition I.2.1

Dans un repère de orthonormé de l'espace on considère deux vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$. Alors on peut définir de façon équivalente le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ par :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = xx' + yy' + zz'}$$

♪ Définition I.2.2

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
- La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est dite orthonormée lorsque $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$ et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$.

Exemple (I.2.3)

Pour $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls, justifier que si $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$, alors ces trois vecteurs forment bien une famille libre (on dit aussi qu'ils sont linéairement indépendants, c'est à dire qu'aucun des trois vecteurs ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux autres...) :

S3

Remarques – Toutes les propriétés du produit scalaire vues dans le plan sont valables (bilinéarité, symétrie, Schwarz...). En particulier, si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une **base orthonormée**, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ on a :

$$\boxed{\vec{u} = \left(\vec{u}\cdot\vec{\imath}\right)\vec{\imath} + \left(\vec{u}\cdot\vec{\jmath}\right)\vec{\jmath} + \left(\vec{u}\cdot\vec{k}\right)\vec{k}}$$

I.3 Produit vectoriel

Dans cette section (et la suite du chapitre) l'espace est orienté par les règles usuelles rencontrées en physique ou SI (règle des trois doigts de la main droite par exemple).

♪ Définition I.3.1

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls :
$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})\,\vec{k}$$
où $\vec{k}$ est le vecteur unitaire directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$.
- si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul : $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$.

Propriété I.3.2 (expression en base orthonormée)

si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs exprimés dans une **base orthonormée** $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Remarques – On a :

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \ldots\ldots \quad \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \ldots\ldots \quad \vec{k} \wedge \vec{\imath} = \ldots\ldots$$

Propriété I.3.3

Le produit vectoriel est **bilinéaire** et **antisymétrique**, c'est à dire que :

• $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{w}) + \mu(\vec{v} \wedge \vec{w})$ et • $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

Propriété I.3.4

1. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Preuve

Le premier point découle directement de la définition. Pour montrer le deuxième, utilisons l'expression analytique :

S4

□

□ ✍ **Exercice P.2** □ ✍ **Exercice P.3** □ ✍ **Exercice P.4**

I.4 Déterminant

♪ Définition I.4.1 (détermiant)

On définit (pour l'instant) le déterminant des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$$

Propriété I.4.2 (déterminant en base orthonormée directe)

On considère 3 vecteurs dans une base orthonormée directe.
Si $\vec{u}(x,y,z)$, $\vec{v}(x',y',z')$ et $\vec{w}(x'',y'',z'')$ on note et on a :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - (zy'x'' + xz'y'' + yx'z'')$$

(règle se Sarrus)

Preuve

Développer le déterminant en suivant la définition (par rapport à la troisième colonne) et retrouver l'expression proposée :

S5

□

Remarques – Application directe : vérifier que l'on ne change pas le determinant de 3 vecteurs par *permutation circulaire*, c'est à dire que l'on a : $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \det(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = \det(\vec{w},\vec{u},\vec{v})$

S6

Propriété I.4.3

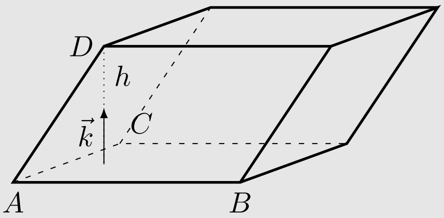
Le déterminant est trilinéaire et antisymétrique (**si on permute deux vecteurs on change le signe**).

Preuve

Vérifions en guise d'exercice l'antisymétrie :

S7

Propriété I.4.4 (Interprétation en terme de volume)



Le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ vaut $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$.

Preuve

S8

Propriété I.4.5 (coplanarité)

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si est seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

Exemple (I.4.6)

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ? Si oui, exprimer $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

S9

☐ ✍ **Exercice P.5** ☐ ✍ **Exercice P.6** ☐ ✍ **Exercice P.7** ☐ ✍ **Exercice P.8**
☐ ✍ **Exercice P.9**

II Plans

II.1 Définitions

On peut définir un plan $\mathscr{P}$ de plusieurs façons :

- Il est nécessaire et suffisant de se donner un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Dans ce cas, le plan $\mathscr{P}$ passant par A dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, que l'on peut noter $\mathscr{P} = A + Vect(\vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les trois vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une famille liée.

- Il est nécessaire et suffisant de se donner un point A et un vecteur (normal) $\vec{n}$. Dans ce cas, le plan $\mathscr{P}$ passant par A et normal à $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ soient orthogonaux.

- Il est nécessaire et suffisant de se donner trois points A, B et C non alignés. Dans ce cas, le plan $\mathscr{P}$ noté $\mathscr{P} = (ABC)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les trois vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une famille liée.

- et on peut combiner les définitions précédentes !

II.2 Équations paramétriques

Fixons un point A et deux vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Notons $\mathscr{P}$ le plan défini par $\mathscr{P} = A + Vect(\vec{u}, \vec{v})$. Cela signifie que :

$$\boxed{M(x, y, z) \in \mathscr{P} \iff \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}}$$

cela donne l'équation paramétrique du plan $\mathscr{P}$:

Propriété II.2.1

Si $A(x_A; y_A; z_A)$, $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, alors le plan $\mathscr{P} = A + Vect(\vec{u}, \vec{v})$ a pour équation paramétrique :

$$\mathscr{P} : \begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases} \qquad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

♪ Définition II.2.2 (vecteur normal)

Un vecteur est dit **normal** à un plan $\mathscr{P}$ s'il est non nul et s'il est orthogonal à tous les vecteurs de la direction de $\mathscr{P}$ (et donc orthogonal à tous les vecteurs de $\mathscr{P}$).

Propriété II.2.3 (caractérisation)

Si $\vec{n}$ est un vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$ alors il est normal à $\mathscr{P}$.

Remarques – Les vecteurs normaux à $\mathscr{P} = A + Vect(\vec{u}, \vec{v})$ sont les vecteurs non nuls colinéaires à $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

II.3 Équations cartésiennes

Fixons un point A et deux vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Notons $\mathscr{P}$ le plan défini par $\mathscr{P} = A + Vect(\vec{u}, \vec{v})$. Cela signifie que :

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathscr{P} &\iff \overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v} \text{ sont coplanaires} \\ &\iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \\ &\iff \dots \end{aligned}$$

Ce type de calculs donne une équation de la forme : $ax + by + cz + d = 0$. On obtient ainsi l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$:

Propriété II.3.1

Soit $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors le plan $\mathscr{P}$ passant par A et normal à $\vec{n}$ a pour équation cartésienne :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

On retiendra :

- Tout plan $\mathscr{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et dans ce cas le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}$.
- Réciproquement, tout ensemble d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal à $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Remarques – Orienter un plan, c'est choisir un vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à $\mathscr{P}$. Une base orthonormale $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathscr{P}$ est dite directe si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{n}$, et indirecte sinon.

☐ ✍ **Exercice P.10** ☐ ✍ **Exercice P.11** ☐ ✍ **Exercice P.12**

II.4 Distance d'un point à un plan

Propriété II.4.1 (projection orthogonale)

Soit M un point de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$. Alors il existe un unique point H vérifiant :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MH} \wedge \vec{n} = \vec{0} \\ H \in \mathscr{P} \end{cases} \qquad \text{avec } \vec{n} \text{ vecteur normal à } \mathscr{P}$$

Ce point H s'appelle le **projeté orthogonal** M sur le plan $\mathscr{P}$.

Preuve

S10

☐

Propriété II.4.2 (Distance)

On a : $d(M, \mathscr{P}) = MH$ avec H projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.

Remarques – On verra des formules de calcul de distance (les mêmes que dans le plan) en exercice.

☐ ✍ **Exercice P.13** ☐ ✍ **Exercice P.14** ☐ ✍ **Exercice P.15**

III Droites

III.1 Représentation paramétrique

Une droite peut se définir à partir d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$. Cette droite est alors l'ensemble des points M de l'espace tels que AM et $\vec{u}$ sont colinéaires. Cela donne l'équation paramétrique :

♪ Définition III.1.1

Si $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors la droite $\mathscr{D} = A + Vect(\vec{u})$ a pour équation paramétrique :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

III.2 Système d'équations cartésiennes

On peut aussi définir une droite comme l'intersection de 2 plans grâce à la propriété suivante :

Propriété III.2.1

- Si deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont non parallèles, alors leur intersection est une droite $\mathscr{D}$. De plus, si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont normaux à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, alors **le vecteur** $\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ **dirige** $\mathscr{D}$.
- Réciproquement, toute droite peut s'écrire comme intersection de deux plans.

Preuve

Visualisons cette situation sur un croquis pour s'en convaincre :

S11

□

On retiendra :

- L'ensemble d'équation

$$\begin{cases} (P_1) : & ax + by + cz + d = 0 \\ (P_2) : & a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

  est :

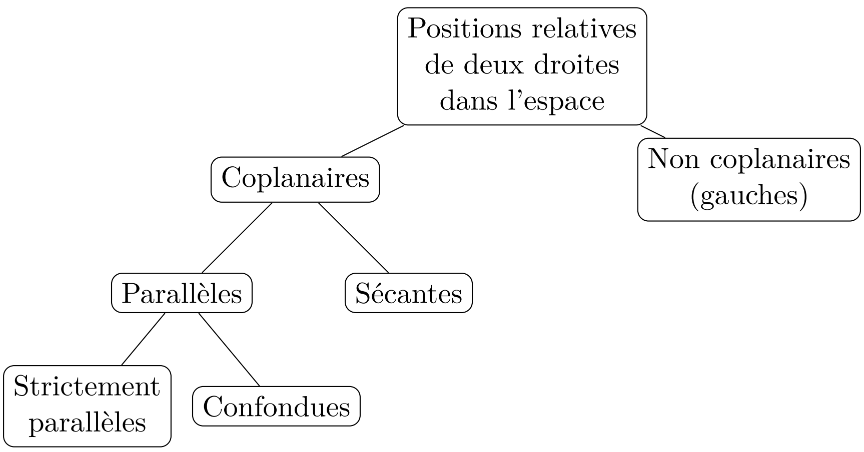
  - soit vide si (P_1) et (P_2) sont strictement parallèles
  - soit un plan si (P_1) et (P_2) sont confondus
  - soit une droite dirigé par $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

- Que toute droite admet un système d'équations cartésiennes de ce type.

□ ✍ **Exercice P.16** □ ✍ **Exercice P.17** □ ✍ **Exercice P.18**

III.3 Position relative de deux droites

Rappelons les positions relatives de deux droites dans l'espace :



☐ ✍ Exercice P.19 ☐ ✍ Exercice P.20

III.4 Distance d'un point à une droite

Propriété III.4.1 (Projection orthogonale d'un point sur une droite)

Soit M un point de l'espace et $\mathscr{D}$ une droite dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Alors il existe un unique point H vérifiant :

$$\begin{cases} H \in \mathscr{D} \\ \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

Ce point H s'appelle **le projeté orthogonal** de M sur $\mathscr{D}$.

Preuve

S12

☐

Propriété III.4.2 (Distance d'un point à une droite)

La distance du point M à la droite $\mathscr{D}$ vaut : $d(M, \mathscr{D}) = MH$

Exemple (III.4.3)

Montrer que si $\mathscr{D} = A + Vect(\vec{u})$ alors $d(M, \mathscr{D}) = \dfrac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Indication : introduire H dans $\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|$

S13

☐ ✍ Exercice P.21 ☐ ✍ Exercice P.22 ☐ ✍ Exercice P.23 ☐ ✍ Exercice P.24

IV Sphères

IV.1 Équation cartésienne

Définition IV.1.1

La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $AM = R$.

Propriété IV.1.2

La sphère de centre $\Omega(a\,;b\,;c)$ et de rayon R a pour équation cartésienne :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Preuve

S14

□

Propriété IV.1.3

L'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ est :

- soit vide
- soit réduit à un point
- soit une sphère

Remarques – On peut donner pour information l'équation paramétrique de la sphère de centre $\Omega(a\,;b\,;c)$ et de rayon R :

$$\begin{cases} x = a + R\cos\varphi\sin\theta \\ y = b + R\sin\varphi\sin\theta, \quad (\varphi,\theta) \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \times \left]-\pi\,;\pi\right] \\ z = c + R\cos\theta \end{cases}$$

IV.2 Intersection sphère/plan

Propriété IV.2.1

Soit $\mathscr{P}$ un plan et $\mathscr{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R. Notons H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathscr{P}$. Alors :

- Si $dist(\Omega, \mathscr{P}) > R$ alors $\mathscr{P} \cap \mathscr{S}$ est vide,
- Si $dist(\Omega, \mathscr{P}) = R$ alors $\mathscr{P} \cap \mathscr{S}$ est réduit au seul point H,

- Si $dist(\Omega, \mathscr{P}) < R$ alors $\mathscr{P} \cap \mathscr{S}$ est le cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - \Omega H^2}$.

Preuve

S15

☐

☐ ✍ **Exercice P.25** ☐ ✍ **Exercice P.26** ☐ ✍ **Exercice P.27**