

# CHAPITRE

$\mathbb{R}$



TSI<sup>1</sup>

Lycée Artaud

2025/2026

## Nombres réels, sup et inf

L'objectif de ce petit chapitre est de rappeler quelques propriétés sur les nombres avant d'introduire, pour un ensemble de nombres, les notions de *bornes supérieure/inférieure* qui généralisent celles de maximum/minimum car, comme on l'a déjà vu, ces dernières avaient la mauvaise idée de ne pas toujours exister !

---

### Sommaire

|           |                                               |          |
|-----------|-----------------------------------------------|----------|
| <b>I</b>  | <b>Généralités sur les réels</b>              | <b>2</b> |
| I.1       | La droite numérique . . . . .                 | 2        |
| I.2       | Relation d'ordre . . . . .                    | 2        |
| <b>II</b> | <b>Bornes dans <math>\mathbb{R}</math></b>    | <b>3</b> |
| II.1      | Rappels . . . . .                             | 3        |
| II.2      | Bornes supérieures et inférieures . . . . .   | 4        |
| II.3      | Cas des fonctions à valeurs réelles . . . . . | 6        |
| II.4      | Intervalles de $\mathbb{R}$ . . . . .         | 6        |

---

## I.1 La droite numérique

**EXEMPLE** –  $\mathbb{R}$  contient les ensembles bien connus ci-dessous :

S1

**Q 1** Montrer que la somme de deux nombres rationnels et un nombre rationnel.

**Q 2** Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

**Q 3** Montrer que le produit d'un rationnel non nul et d'un irrationnel est un irrationnel.

**Q 4** Que pensez-vous de la somme et du produit de deux irrationnels ?

**Q 5** Montrer que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

### Propriété I.2.1

$$x \leq y \iff y - x \text{ positif ou nul}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq x$  (*réflexivité*)
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \text{ et } y \leq x \implies x = y$  (*antisymétrie*)
- $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \leq y \text{ et } y \leq z \implies x \leq z$  (*transitivité*)
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a toujours  $x \leq y$  ou  $y \leq x$  (*ordre total*)

- La relation  $<$  permet de comparer des réels, mais n'est pas une relation d'ordre, pourquoi ?  
.....
- Que dire d'une relation d'ordre total sur  $\mathbb{C}$  ? .....
- Ce sera l'occasion de retourner voir le chapitre B sur les inéquations.

**Q1** Soit  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $2 \leq x \leq 4$  et  $-5 \leq y \leq -3$ .

**Q2** Soit  $x$  et  $y$  deux réels de l'intervalle  $] -1, 1[$ . Démontrer que  $\left| \frac{x+y}{1+xy} \right| \in [0, 1[$   
(histoire de carrés ?!)

## II.1 Rappels

- $M \in \mathbb{R}$  est un **majorant** de  $X$  si :  $\forall x \in X, x \leq M$ .
- $m \in \mathbb{R}$  est un **minorant** de  $X$  si :  $\forall x \in X, x \geq m$ .

- Un ensemble admettant un majorant (resp. minorant) est dit **majoré (resp. minoré)**. S'il est à la fois majoré et minoré on dit qu'il est **borné**.
- Si  $M$  est un majorant (resp. minorant), alors tous les réels supérieurs (resp. inférieurs) à  $M$  sont aussi des majorants (resp. minorants).

- $a$  est LE **maximum**, de  $X$ , noté  $\max(X)$ , si : 
$$\begin{cases} a \text{ est un majorant de } X \\ a \in X \end{cases}$$
- $a$  est LE **minimum**, de  $X$ , noté  $\min(X)$ , si : 
$$\begin{cases} a \text{ est un minorant de } X \\ a \in X \end{cases}$$

- Le maximum (resp. minimum) est aussi appelé *le plus grand élément* (resp. le plus petit élément).
- Dans  $\mathbb{Z}$  toute partie majorée (resp. minorée) admet un maximum (resp. minimum).
- Noter en revanche que dans  $\mathbb{R}$ , un ensemble borné n'admet pas nécessairement de plus grand (resp. plus petit) élément, mais qu'en cas d'existence, celui-ci est **unique**.

C'est pour pallier à cette insuffisance d'existence que l'on introduit les notions qui suivent...

## II.2 Bornes supérieures et inférieures

### ♪ Définition II.2.1 (Borne supérieure/inférieure)

Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

- Si  $X$  est majorée, on appelle **borne supérieure de  $X$** , notée  $\sup(X)$ , le plus petit des majorants de  $X$ , sinon c'est  $+\infty$ .
- Si  $X$  est minorée, on appelle **borne inférieure de  $X$** , notée  $\inf(X)$ , le plus grand des minorants de  $X$ , sinon c'est  $-\infty$ .

**ATTENTION !** – Cette définition manque *a priori* de rigueur, car l'ensemble des majorants (resp. des minorants) n'admet pas nécessairement de plus petit (resp. plus grand) élément (voir paragraphe précédent). Mais il n'en est rien d'après le théorème (admis car faisant intervenir la construction de  $\mathbb{R}$  qui est hors programme) suivant :

### ☺ Théorème II.2.2

Toute partie **non vide** et **majorée** (resp. minorée) de  $\mathbb{R}$ , admet une **borne supérieure** (resp. inférieure).

REMARQUES –

- L'unicité de la borne sup/min découle de l'unicité du maximum/minimum.
- Si  $X$  est une partie de  $\mathbb{R}$  qui admet un maximum  $M$ , alors  $M$  est aussi sa borne supérieure.

EXEMPLE – Que dire des bornes supérieures des parties de  $\mathbb{R}$  suivantes :

$$A_1 = [0, 2], A_2 = [0, 2[, A_3 = \mathbb{R}^*, A_4 = \mathbb{R}_+, A_5 = \{n^2/n \in \llbracket 0, 10 \rrbracket\}$$

S4

EXEMPLE – Que pensez-vous de la borne supérieure de l'ensemble  $A = \{x \in \mathbb{Q}, x \geq 0 \text{ et } x^2 \leq 2\}$  ?

S5

### Propriété II.2.3 (caractérisation de la borne supérieure/inférieure)

Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$ , et  $a$  un élément de  $\mathbb{R}$ .

- $a$  est la **borne supérieure** de  $X$ , notée  $\sup(X)$ , si : 
$$\begin{cases} \forall x \in X & x \leq a, \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in X \quad x > a - \varepsilon \end{cases}$$
- $a$  est la **borne inférieure** de  $X$ , notée  $\inf(X)$ , si : 
$$\begin{cases} \forall x \in X & x \geq a, \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in X \quad x < a + \varepsilon \end{cases}$$

**Preuve**

Idee : par exemple, pour la borne supérieure, la première partie traduit le fait que  $a$  est un majorant, et la deuxième que c'est le plus petit ! □

**Application : « Passage au sup »**

Il est courant d'utiliser le raisonnement suivant : si  $K$  est un réel qui majore (strictement ou pas) une partie  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$  :

$$\forall x \in X, x < K \quad (1)$$

Alors on a :

$$\sup X \leq K$$

On dit que l'on a fait un passage au sup dans l'inégalité (1). Noter bien que l'inégalité stricte devient large...

□ ➤ **Exercice R.3 (Des bornes dans tous les sens)**

Étudier les maj, minorants, max, minimums, bornes sup et inf éventuels des ensembles suivants :

$$A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad B = \left\{ (-1)^n + \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad C = \mathbb{Q} \cap ]0, 1[$$

$$D = \{ \arctan x, x \in \mathbb{R} \} \quad E = \{ t - t^2, t \in \mathbb{R} \}$$

□ ➤ **Exercice R.4 (Un résultat classique)**

Un résultat souvent utilisé en analyse :

Si un réel  $a$  vérifie  $\forall \varepsilon > 0 \quad |a| \leq \varepsilon$ , alors  $a$  est nul

**Q 1** Montrer ce résultat par la contraposée.

**Q 2** Retrouver ce résultat à l'aide de la notion de borne inférieure :

**a.** Que vaut  $\inf \{ \mathbb{R}_+^* \}$  ?

**b.** Remarquer que l'hypothèse signifie que  $|a|$  est un minorant de  $\mathbb{R}_+^*$  et conclure.

□ ➤ **Exercice R.5 (Un théorème classique de point fixe)**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction croissante. On pose :

$$A = \{ x \in [a, b], f(x) \leq x \}$$

**Q 1** Montrer que  $A$  est non vide.

**Q 2** En déduire l'existence de  $c = \inf(A)$  et justifier le fait que  $c \in [a, b]$ .

**Q 3 a.** En raisonnant par l'absurde, démontrer que  $f(c) \geq c$   
(On montrera qu'il existe  $x \in ]f(c); c[ \cap A$ , ce qui est impossible...)

**b.** En raisonnant par l'absurde, démontrer que  $f(c) \leq c$   
(On montrera qu'il existe  $x \in ]f(c); c[ \cap A$  et que cela mène à une contradiction...)

**Q 4** Conclure que  $f$  possède au moins un point fixe (c'est à dire un réel  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $f(x_0) = x_0$ ).

## II.3 Cas des fonctions à valeurs réelles

On a vu dans les paragraphes précédents la notion de bornes pour des parties de  $\mathbb{R}$ . Le vocabulaire s'étend aux fonctions avec la convention suivante : lorsque l'on parle de majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure pour une fonction, cela s'entend pour l'**ensemble image** de cette fonction.

### □ Exercice R.6 (Sup d'une fonction)

Soit  $X$  un ensemble. Pour  $f \in \mathbb{R}^X$  (c'est à dire  $f$  est une fonction de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ ), on pose (lorsque cela existe) :

$$\sup f = \sup f(X) = \sup\{f(x), x \in X\}$$

Pour  $f \in \mathbb{R}^X$  et  $g \in \mathbb{R}^X$  telles que  $\sup f$  et  $\sup g$  existent, montrer que :

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$$

Que pensez-vous des cas d'égalité ?

## II.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

### ♪ Définition II.4.1 (Intervalles)

Soit  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a \leq b$ . les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont les parties de  $\mathbb{R}$  suivantes :

|                                                   |                                                   |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ | $[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$  |
| $[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$    | $] -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$ |
| $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$    | $]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} / a < x\}$     |
| $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$       | $] -\infty, b[ = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$    |
| $\mathbb{R} = ] -\infty, +\infty[$                | $\emptyset$                                       |

### Propriété II.4.2 (Caractérisation des intervalles)

Une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle si et seulement si, pour tous  $a$  et  $b$  dans  $I$ , on a  $[a, b] \subset I$ .

### □ Exercice R.7 (Preuve de la caractérisation des intervalles)

Démontrer qu'une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle si et seulement si, pour tout  $x \leq y$  dans  $I$ , on a  $[x, y] \subset I$ . (On pourra introduire  $a = \inf I$  et  $b = \sup I$ )

**REMARQUES** – On note parfois  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .