

CHAPITRE

S



TSI¹

Lycée Artaud

2025/2026

Suites de nombres réels

Sommaire

I	Rappels et généralités sur les suites	2
I.1	Définition et modes de génération	2
I.2	Vocabulaire et comportement d'une suite réelle	3
I.3	Suites extraites	4
II	Rappels sur suites arithmétiques et géométriques	4
II.1	Suites arithmétiques	4
II.2	Suites géométriques	5
III	Limite d'une suite (définition avec quantificateurs)	6
III.1	Limite infinie	6
III.2	Limite finie	6
III.3	Propriétés élémentaires	8
III.4	Limites et suites extraites	9
III.5	Opérations sur les limites	10
IV	Théorèmes de convergence	10
IV.1	Limite par encadrement	10
IV.2	Limites de suites monotones	11
IV.3	Suites adjacentes	12

I Rappels et généralités sur les suites

I.1 Définition et modes de génération

♪ Définition I.1.1

Une suite réelle est une *application* de A dans $\mathbb{R}$, où A est une partie de $\mathbb{N}$. Généralement on a $A = \mathbb{N}$ ou $A = \mathbb{N}^*$.

Notations :

- L'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$ se note usuellement $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Une suite se note usuellement avec une lettre : u ou (u_n)
- Le terme de rang n d'une suite u se note $u(n)$, ou plus souvent par économie u_n . On prendra soin de ne pas confondre les notations (u_n) (la suite) et u_n (un terme de la suite). On dit que u_n est le **terme général** de la suite u .

Génération : On peut définir une suite de plusieurs façons :

- Par une formule **explicite** : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$, avec f une fonction définie sur $\mathbb{N}$. Exemple :

S1

- Par une formule **de récurrence** : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$ et u_0 connu avec g définie sur $\mathbb{R}$ (ou une partie de $\mathbb{R}$). Exemple :

S2

- Par une formule **implicite**. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est solution de l'équation $h_n(x) = 0$ où h_n est une famille de fonctions possédant chacune une unique racine. Exemple :
Après avoir vérifié que l'équation $(E_n) : nx^2 + x(n-1) - 1 = 0$ admettait pour tout $n \in \mathbb{N}$ une unique solution positive, on peut définir la suite (u_n) dont les termes sont les solutions de (E_n) .

S3

Dans cet exemple, on peut exhiber le terme général de la suite, mais ce ne sera pas toujours le cas !

EXEMPLE – Formules explicites et récurrentes pour les suites **arithmétiques** et les suites **géométriques**

S4

- ☐ ✎ Exercice S.1
- ☐ ✎ Exercice S.2
- ☐ ✎ Exercice S.3
- ☐ ✎ Exercice S.4
- ☐ ✎ Exercice S.5

I.2 Vocabulaire et comportement d’une suite réelle

REMARQUES – Souvent on ne s’occupera des comportements des suites qu’à partir d’un certain rang (apucr).

On dit que la suite u est	si ...
majorée	
minorée	
bornée	
constante	
stationnaire	
croissante	
décroissante	
monotone	
strictement croissante	
strictement décroissante	

Propriété I.2.1

Soit u une suite définie de façon explicite par $u_n = f(n)$. Alors si f est (strictement) croissante (resp. (strictement) décroissante) alors (u_n) aussi.
La réciproque est fausse.

Preuve

S5

MÉTHODE – Pour étudier la (stricte) monotonie d’une suite on peut donc :

- Étudier pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $u_{n+1} - u_n \dots$
- Si la suite est définie de manière explicite $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction $f \dots$
- On peut aussi parfois, si la suite est à termes strictement positifs (ou strictement négatifs), étudier la comparaison du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

- ☐ ✎ Exercice S.6
- ☐ ✎ Exercice S.7
- ☐ ✎ Exercice S.8

I.3 Suites extraites

♪ Définition I.3.1 (suite extraite)

Une suite (v_n) est appelée **suite extraite** d'une suite (u_n) s'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *strictement croissante* telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

EXEMPLE –

- (u_{n+1}) , (u_{2n}) , (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n) .
- Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n$. Les suites $v_n = 6n$, $w_n = 3n$ et $t_n = 4n + 2$ sont-elles des suites extraites de (u_n) ? Si oui exhiber la fonction φ :

S6



II Rappels sur suites arithmétiques et géométriques

II.1 Suites arithmétiques

♪ Définition II.1.1

Une suite est **arithmétique** lorsque pour tout n on a $u_{n+1} = u_n + r$ avec r un réel fixé appelé raison.

Propriété II.1.2

Une suite est arithmétique de raison r **si et seulement si** son expression explicite est de la forme :

$$u_n = u_p + r \times (n - p)$$

où p est un entier quelconque.

Les résultats sur les variations et les limites sont "évidents"...

On retiendra de plus la formule permettant de calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Propriété II.1.3

Si (u_n) est arithmétique alors on a :

$$\sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

Cette formule se retient en français par :

« Premier terme plus dernier terme, multiplié par nombre de termes divisé par 2 »

II.2 Suites géométriques

♪ Définition II.2.1

Une suite est **géométrique** lorsque pour tout n on a $u_{n+1} = q \times u_n$ avec q un réel fixé appelé raison.

Propriété II.2.2

Une suite est géométrique de raison q **si et seulement si** son expression explicite est de la forme :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

où p est un entier quelconque.

Propriété II.2.3

Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 admet pour variations :

	$u_0 < 0$	$u_0 > 0$
$q < 0$	suite non monotone (signe alterné)	suite non monotone (signe alterné)
$0 < q < 1$	suite croissante	suite décroissante
$1 = q$	suite constante	suite constante
$1 < q$	suite décroissante	suite croissante

Propriété II.2.4

Si (u_n) est géométrique de raison q :

- Si $-1 < q < 1$ alors (u_n) converge vers 0.
- Si $q \leq -1$ alors (u_n) n'admet pas de limite.
- Si $q > 1$ alors (u_n) diverge vers $\pm\infty$ en fonction du signe de u_0 .

On retiendra la formule permettant de calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

Propriété II.2.5

Si (u_n) est géométrique alors on a :

$$\sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Cette formule se retient en français par :

« Premier terme multiplié par (1-raison à la puissance nombre de termes), et divisé par (1-raison) »

□ ↗ Exercice S.9

□ ↗ Exercice S.10

III Limite d'une suite (définition avec quantificateurs)

III.1 Limite infinie

♪ Définition III.1.1 (limite infinie)

On dit qu'une suite (u_n) :

- tends vers $+\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies u_n \geq A$
- tends vers $-\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies u_n \leq A$

Interprétation graphique

S7

EXEMPLE – Montrer qu'une suite qui diverge vers $+\infty$ est minorée :

S8

III.2 Limite finie

♪ Définition III.2.1 (Limite finie)

Soit (u_n) une suite et ℓ un réel. On dit que la suite u admet ℓ pour limite, ou qu'elle converge vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

REMARQUES – Comme toujours, attention à l'ordre des quantificateurs !

Interprétation graphique

S9

EXEMPLE –

1. Justifier à l'aide de la définition que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

S10

2. Soit (u_n) une suite qui converge vers 0. Montrer qu'à partir d'un certain rang on a $|u_n^2| \leq |u_n|$.

S11

Propriété III.2.2 (Unicité)

Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux réels tels que $u_n \rightarrow \ell_1$ et $u_n \rightarrow \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$.

Preuve

S12

□

♪ Définition III.2.3 (suite convergente)

On dit qu'une suite réelle est **convergente** si elle admet une limite **finie**. Dans le cas contraire on dit qu'elle **diverge**.

REMARQUES –

- Une suite (u_n) est convergente s'écrit :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

- Attention au vocabulaire, car une suite qui tend vers $\pm\infty$ est divergente.

EXEMPLE – Montrer en raisonnant par l'absurde que la suite $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente.

S13

☐ Exercice S.11

☐ Exercice S.12

☐ Exercice S.13

☐ Exercice S.14

☐ Exercice S.15

III.3 Propriétés élémentaires

Propriété III.3.1

1. Une suite convergente est bornée. Réciproque fausse.
2. Soit (u_n) convergente vers ℓ :
 - Si $m < \ell$ alors à partir d'un certain rang, (u_n) est minorée par m .
 - Si à partir d'un certain rang, (u_n) est minorée par m , alors $m \leq \ell$ (**passage à la limite**).
3. (Cas particulier très utile) Si (u_n) est une suite convergeant vers $\ell > 0$ alors il existe un réel $m > 0$ tel que la suite soit minorée par m à partir d'un certain rang.
4. même chose avec majorée...

Preuve

Pas de difficultés particulière, il *suffit* d'utiliser la définition. Par exemple montrons le point 3 :

S14

□

Propriété III.3.2 (passage à la limite)

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 :
 Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ ou $u_n < v_n$ alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Preuve

Envisageons un raisonnement par l'absurde :

S15

Montrer que si $u_n < v_n$ on n'a pas mieux que $\ell_1 \leq \ell_2$

S16

□

III.4 Limites et suites extraites**Propriété III.4.1 (Suites extraites)**

Si (u_n) est une suite tendant vers une limite, finie ou infinie, alors toute suite extraite de u tend vers la même limite.

Preuve

Admise, mais intéressante ;-)

□

✎ Exercice S.16

Propriété III.4.2

Si u est une suite telle que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, finie ou infinie, alors la suite u tend vers cette limite commune.

Preuve

Envisageons par exemple le cas où la limite est finie et vaut ℓ :

S17

□

III.5 Opérations sur les limites

Propriété III.5.1 (opérations usuelles)

Les résultats sur les limites liés aux quatre opérations usuelles sont "naturels". On garde à l'esprit les formes indéterminées...

Preuve

Admises

□

Propriété III.5.2 (Un cas particulier important)

Le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 est une suite tendant vers 0.

Preuve

S18

□

□ Exercice S.17

□ Exercice S.18

□ Exercice S.19

□ Exercice S.20

IV Théorèmes de convergence

IV.1 Limite par encadrement

☉ Théorème IV.1.1 ("gendrarnes")

1. Soient u , v et w trois suites vérifiant à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si u et w convergent vers la même limite finie ℓ , alors v converge également vers ℓ .
2. Soient u et v deux suites vérifiant à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$.
 - Si u tend vers $+\infty$, alors v tend également vers $+\infty$.
 - Si v tend vers $-\infty$, alors u tend également vers $-\infty$.

Preuve

S19

□

REMARQUES – En pratique, pour montrer qu’une suite u tend vers ℓ , on majore $|u_n - \ell|$ par une suite qui tend vers 0. On déduit d’après le théorème précédent que $|u_n - \ell|$ tend vers 0, donc que $u_n - \ell$ tend vers 0 et donc u_n tend vers ℓ .

EXEMPLE – Montrer que la suite $u_n = 2 + \frac{\cos(n^2 + 2)}{n}$ converge.

S20

☐ Exercice S.21

☐ Exercice S.22

☐ Exercice S.23

☐ Exercice S.24

IV.2 Limites de suites monotones

☉ Théorème IV.2.1 (de la limite monotone)

Soit u une suite croissante à partir d’un certain rang :

- Si elle est majorée par M , alors elle converge vers $\ell \leq M$. On a même mieux, on sait que $\ell = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
- Si elle n’est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

Soit v une suite décroissante à partir d’un certain rang :

S21

Preuve

S22

REMARQUES –

- Toute suite croissante admet donc une limite (finie ou infinie).
- Si une suite est croissante et converge vers ℓ , alors pour tout entier n on a $u_n \leq \ell$.

□ Exercice S.25

□ Exercice S.26

□ Exercice S.27

□ Exercice S.28

□ Exercice S.29

□ Exercice S.30

□ Exercice S.31

IV.3 Suites adjacentes

♪ Définition IV.3.1 (Suites adjacentes)

On dit que deux suites sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence tend vers 0.

☺ Théorème IV.3.2

Si (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes, alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$
- (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite ℓ .
- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, a_n \leq \ell \leq b_k$.

Preuve

S23

□

EXEMPLE – Montrer la convergence des suites (u_n) et (v_n) dont les termes généraux sont:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$$

S24

□ Exercice S.32

□ Exercice S.33

□ Exercice S.34

□ Exercice S.35