

PLANCHE S

SUITES NUMÉRIQUES

□ Exercice S1 (Visualiser une suite définie par récurrence)

Représenter graphiquement le comportement des suites (u_n) et (v_n) en fonction de la valeur de leur premier terme :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} \text{ et } u_0 \geq 0 \qquad v_{n+1} = \frac{1}{v_n} \text{ et } v_0 > 0$$

Voir l'application geogebra : <https://www.geogebra.org/m/tfpHxzSx>

□ Exercice S2 (Suites avec python)

Q1 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

Écrire une fonction python qui reçoit un entier n et qui renvoie la liste des termes u_1 à u_n . Que vaut u_{10} ?

Q2 On considère la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = \frac{21}{20}v_n - 100$ et $v_0 = 1000$.

a. Écrire une fonction python qui reçoit un entier n et qui renvoie la liste des termes v_0 à v_n . Que vaut v_{10} ?

b. On admet que (v_n) deviendra négative à partir d'un certain rang.
Quel est le plus petit n tel que $v_n < 0$?

Q3 Soit $w_0 = \frac{1}{10}$ et $w_{n+1} = 3w_n - \frac{1}{5}$. Utiliser la fonction python précédente pour calculer w_{50} . Que se passe-t-il ?

□ Exercice S3 (Existence d'une suite définie par récurrence)

Peut-on définir une suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$

□ Exercice S4 (Récurrences descendantes)

Déterminer le terme général de (u_n) , (v_n) et (w_n) par « récurrence descendante »

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{n+1} u_n \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{v_n} \end{cases} \quad \begin{cases} w_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 1 - 2w_n \end{cases}$$

□ Exercice S5 (Une suite définie de façon implicite)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ et x réel, on pose $g_n(x) = x^n + nx - 1$.

Q1 En distinguant les cas n pair et impair, établir le tableau de variations des fonctions g_n .

Q2 Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $u_n > 0$ tels que : $x^n + nx - 1 = 0$. ((u_n) est une suite définie implicitement).

□ Exercice S6 (Monotonie)

Étudier la (stricte) monotonie éventuelle des suites suivantes :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} \qquad v_n = -\frac{n^n}{n!} \qquad s_n = (-1)^n \qquad t_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

□ Exercice S7

Q1 Le produit de deux suites minorées est-elle minorée ?

Q2 Montrer que si u est croissante à partir d'un certain rang alors elle est minorée.

□ Exercice S8

Soit (u_n) une suite croissante. On considère $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

Q1 Montrer que pour tout $n > 0$, $v_n \leq u_n$.

Q2 En déduire que (v_n) est croissante aussi.

□ Exercice S9 (Suites arithmétiques/géométriques)

On considère (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$ Le but est de déterminer la limite de la suite (u_n) . Pour

cela, on considère une suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

Q1 Conjecturer à l'aide d'un algorithme la limite de la suite (u_n) .

Q2 Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$, puis donner son écriture explicite.

Q3 On admet que pour tout n on a $v_n \neq 1$. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

Q4 Déterminer la limite de la suite (u_n) .

□ Exercice S10 (Suites arithmétiques/géométriques)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

On désigne de plus par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

Q1 a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Q2 Pour tout entier naturel non nul n , on pose:

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

a. Exprimer S_n en fonction de n .

b. Déterminer la limite de la suite (T_n) .

□ Exercice S11 (limite avec la définition)

On considère une suite réelle positive (u_n) vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, u_n > 10^{-k}\}$ est fini. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

□ Exercice S12 (limite avec la définition)

Soit (u_n) une suite dont tous les termes sont des entiers relatifs. Montrer que si cette suite converge, alors elle est constante à partir d'un certain rang (stationnaire).

□ Exercice S13 (limite avec la définition, on coupe en deux)

Soit (u_n) une suite telle qu'il existe une suite α_p tendant vers 0 vérifiant :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad |u_n| \leq \alpha_p + \frac{p}{n+1}$$

Montrer que (u_n) tend vers 0.

□ Exercice S14 (Un classique : le théorème de Césaro)

Soit (u_n) une suite réelle convergente. On considère la suite $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$.

Q1 Supposons que (u_n) converge vers 0.

- Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
- On considère alors la suite $w_n = \frac{u_1 + \dots + u_{n_1}}{n}$. Justifier qu'il existe un rang n_2 à partir duquel $|w_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
- En déduire que (v_n) tend vers 0.

Q2 Supposons maintenant que (u_n) converge vers un réel ℓ quelconque. Démontrer que (v_n) converge aussi vers ℓ .

□ Exercice S15 (Limites)

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \rightarrow \ell$. Montrer que $\frac{u_n}{n} \rightarrow \ell$.
(Indic : utiliser Césaro sur la suite (s_n) définie par $s_n = u_n - u_{n-1}$)

□ Exercice S16 (Divergence et suites extraites)

En utilisant des suites extraites, montrer que les suites $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \cos(n\pi/4)$ sont divergentes.

□ Exercice S17

Q1 Si (u_n) est une suite convergente, montrer que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0.

Q2 Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.

Q3 Trouver deux suites divergentes dont la somme est une suite convergente et dont le produit est une suite convergente.

□ Exercice S18

Illustrer chacun des cas en exhibant deux suites u et v :

Q1 $u \rightarrow +\infty$, $v \rightarrow -\infty$ et $u + v$ converge.

Q2 $u \rightarrow +\infty$, $v \rightarrow -\infty$ et $u + v$ diverge.

Q3 $u \rightarrow +\infty$, $v \rightarrow 0$ et uv converge.

Q4 $u \rightarrow +\infty$, $v \rightarrow 0$ et uv diverge.

□ Exercice S19 (Opérations sur les limites)

Étudier les limites des suites :

Q1 $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}$

Q2 $v_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0)$

Q3 $s_n = \frac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos n + \frac{1}{n^2}}$

Q4 $t_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

Q5 $x_n = \sqrt{n - \cos n} - \sqrt{n}$

Q6 $y_n = \ln(n^2 + 1) - 2\ln(n)$

□ Exercice S20 (sin(n) n'admet pas de limite !)

On se propose de démontrer que la suite $u_n = \sin(n)$ n'admet pas de limite. Pour cela raisonnons par l'absurde en supposant que $\sin(n) \rightarrow \ell$.

Q1 Compléter la formule trigonométrique (factorisation) : $\sin(n+2) - \sin(n) = \dots$

Q2 En déduire que $\cos(n) \rightarrow 0$ puis que $\ell = \pm 1$.

Q3 Compléter la formule $\sin(2n) = \dots$

Q4 En déduire que $\ell = 0$ et conclure.

□ Exercice S21 (Encadrement)

Monter que les suites convergent et déterminer leur limite :

Q1 $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

Q2 $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}$

Q3 $w_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k + n^2}$

Q4 $s_n = \left(\sin \frac{1}{n^2} + \frac{1}{5} \cos n \right)^n$

□ Exercice S22 (Encadrement)

On admet que, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$.

□ Exercice S23 (Suite implicite, encadrement)

Q1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $nx = \cos(x)$ possède une unique solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que l'on notera x_n .

Q2 Sans chercher à expliciter x_n , montrer que la suite (x_n) converge vers 0.

□ Exercice S24 (encadrements)

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$.

Q1 Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$, $u_n < \frac{n+1}{2^n}$.

Q2 Qu'en déduire ?

□ Exercice S25 (Suites monotones)

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$. Justifier à l'aide du théorème de monotonie que (u_n) converge vers un nombre $\ell \geq 0$.

□ Exercice S26 (Suites monotones)

Soit u la suite définie par : $u_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$.

Q1 Montrer que $\forall p \geq 1 \quad \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{2^{p-1}}$.

Q2 En déduire que u converge vers une limite $\ell \leq 3$. (*Nous verrons plus tard que $\ell = e = \exp(1)$*)

□ Exercice S27 (Suites monotones)

Soit (u_n) une suite réelle croissante admettant une sous-suite majorée. Montrer que (u_n) converge (*Penser à un raisonnement par l'absurde...*)

□ Exercice S28 (Étude d'une suite récurrente)

On considère la fonction f définie sur $I = [0; 4]$ par $f(x) = \sqrt{6+x}$.

Q1 Justifier que f est croissante sur I .

Q2 Montrer que I est stable par f , c'est à dire que : $\forall x \in I, f(x) \in I$.

Q3 On définit alors la suite (u_n) par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 0 \end{cases}$

- Montrer à l'aide d'une mini récurrence que (u_n) est bornée et donner des bornes.
- Montrer que (u_n) est croissante.
- Montrer que (u_n) est convergente.
- Déterminer la limite de (u_n) .
- Conclure sur les bornes inférieures et supérieures de (u_n) .

□ Exercice S29 (Étude d'une suite récurrente)

Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Q1 Vérifier que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$. Ce qui permet de justifier que la suite (u_n) existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q2 Justifier que (u_n) admet une limite.

Q3 Déterminer cette limite.

□ Exercice S30 (Étude d'une suite récurrente)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$.

Q1 Démontrer que l'intervalle $I = [0; \frac{1}{4}]$ est stable par f .

Q2 On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

- Justifier que (u_n) existe pour tout n et qu'elle est bornée.
- Calculer u_1 et montrer par une récurrence (immédiate) que (u_n) est croissante.
- En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

□ Exercice S31 (suite récurrente avec f contractante)

On considère une fonction f définie sur un intervalle I vérifiant :

- I est stable par f (c'est à dire $f(I) \subset I$)
- $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ avec $k \in]0; 1[$ (on dit que f est *contractante*)
- Il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$ (ℓ est un *point fixe*).

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Q1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$.

Q2 En déduire que (u_n) converge vers ℓ .

Q3 *Application* : on considère la fonction f définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

- Montrer que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
- Montrer que $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|$ (On pourra utiliser une intégrale...)
- Montrer que la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
 converge, et déterminer sa limite.

□ Exercice S32 (Suites adjacentes)

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) dont les termes généraux sont $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ sont adjacentes. Qu'en déduit-on sur la convergence de u ?

□ Exercice S33 (Suites adjacentes)

Montrer que les suites $u_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes, et donc convergentes.

□ Exercice S34 (Suites adjacentes)

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{p+1}$. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes. En déduire que la suite u est convergente.

□ Exercice S35 (Suites adjacentes)

(u_n) et (v_n) sont définies par: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$

Q1 Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1 \leq v_n$

Q2 Montrer que la suite (w_n) de terme général $w_n = v_n - u_n$ est géométrique.

Q3 Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

□ Exercice S36 (Dichotomie)

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La méthode de *dichotomie*, étudiée en informatique permet d'approcher la solution de l'équation $f(x) = 0$ avec p bits significatifs en p étapes, ce qui est très efficace.

Ses conditions d'utilisation sont assez simples : on demande seulement à la fonction f d'être continue et de changer de signe. Cette méthode est basée sur la construction de deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) dont la limite est la solution α de l'équation $f(x) = 0$.

Q1 Rappeler le principe de cet algorithme (en français et en python) et justifier sa convergence.

Q2 Application : trouver une solution approchée à 10^{-3} près sur $I = [0; 1]$ de $x^5 - 3x^3 - 1 = 0$