

CHAPITRE

T



TSI¹

Lycée Artaud

2025/2026

Calcul matriciel

Sommaire

I	Ensemble des matrices	2
I.1	Notion de matrice	2
I.2	Quelques cas particuliers	2
II	Opérations sur les matrices	3
II.1	Combinaisons linéaires	3
II.2	Produit matriciel	3
III	Matrices carrées	7
III.1	Généralités	7
III.2	Puissances	7
III.3	Matrices carrées inversibles	8

II.1 Combinaisons linéaires

On considère deux matrices de même taille $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = [b_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ ainsi qu'un scalaire λ .

- $$A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

- $$\lambda A = [\lambda a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

- L'addition des matrices est **commutative**, c'est à dire que $A + B = B + A$
- L'addition des matrices est **associative**, c'est à dire que $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
- On a : $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ et $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

« triviale » : il suffit d'écrire !



ATTENTION ! – On aurait pu envisager comme pour la somme un produit « terme à terme », mais ce n'est pas le cas, en particulier car cela n'aurait pas été compatible avec l'utilisation des matrices pour résoudre des systèmes (quand on faisait $AX = B \dots$). On a déjà vu dans le chapitre sur les systèmes les conditions sur les lignes et les colonnes afin de donner du sens au produit et aussi comment on faisait le produit d'une matrice par une matrice colonne. On va voir maintenant comment on fait le produit de deux matrices quelconques.

♪ Définition II.2.1 (produit d'une matrice ligne par une matrice colonne)

On considère $L = [\ell_1, \dots, \ell_p]$ et $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$ avec le **même nombre de coefficients**.

Le **produit** de L par C (dans cet ordre !) est le **scalaire** :

$$L \times C = \ell_1 c_1 + \dots \ell_p c_p = \sum_{k=1}^p \ell_k c_k$$

On peut ensuite définir le produit de deux matrices dans le cas général :

♪ Définition II.2.2 (produit matriciel)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. La **matrice produit** de A par B est la matrice, notée AB de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont le coefficient à la place (i, j) est le produit de la ligne i de A par la colonne j de B . Soit encore :

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

REMARQUES –

- **Attention aux dimensions des matrices A et B :**

le nombre de colonnes de A doit être le même que le nombre de lignes de B .

- Visuellement on peut représenter le produit ainsi :



- La j -ème colonne de AB est la produit de A par la j -ème colonne de B .
- La i -ème ligne de AB est la produit de la i -ème ligne de A par B .

EXEMPLE –

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = ?$$

S4

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = ?$$

S5

• Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :

– $A \times I_p = \dots\dots\dots$ et $I_n \times A = \dots\dots\dots$

– $A \times [0]_{p,q} = \dots\dots\dots$ et $[0]_{q,n} \times A = \dots\dots\dots$

Attention !

En considérant les matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et en calculant les produits suivants :

• $A \times B = ?$

S6

• $B \times A = ?$

S7

on constate que :

- Le produit matriciel **n'est pas commutatif**, c'est à dire qu'en général on a $AB \neq BA$,
- Le produit matriciel **n'est pas intègre**, c'est à dire que l'on peut avoir $AB = [0]$ avec ni A ni B nulle.

Propriété II.2.3

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ alors le produit $A \times X$ est la combinaison linéaire des colonnes de A avec les coefficients de X :

$$AX = x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{bmatrix} + \cdots + x_p \begin{bmatrix} a_{1,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{bmatrix}$$

La propriété précédente nous permet de retrouver l'écriture d'un système linéaire en terme de multiplication de matrices :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases} \iff AX = B \quad \text{avec } A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ et } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

REMARQUES – 2 cas particuliers :

- Le produit de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par la matrice colonne X_i dont l'élément ligne i est le seul non nul et vaut 1 donne la matrice colonne constituée de la i -ème colonne de A .

Exemple : $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$

- Le produit de la matrice ligne X_j dont l'élément colonne j est le seul non nul et vaut 1 par la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donne la matrice ligne constituée de la j -ème ligne de A .

Exemple : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} =$

Propriété II.2.4

Soient A , B et C des matrices dont les tailles permettent de réaliser les sommes et produits suivants :

- pour $\lambda \in \mathbb{K}$ on a : $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- Associativité : $A(BC) = (AB)C = ABC$
- Distributivité : $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$

On rappelle en revanche que le produit matriciel **n'est pas commutatif**.

III Matrices carrées

III.1 Généralités

♪ Définition III.1.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n .

- Les coefficients $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ sont appelés **coefficients diagonaux** de A .
- On dit que A est une **matrice diagonale** lorsque ses coefficients non diagonaux sont nuls :

S8

- On dit que A est une **matrice triangulaire supérieure** lorsque ses coefficients au dessous de la diagonale sont nuls :

S9

- On dit que A est une **matrice triangulaire inférieure** lorsque ses coefficients au dessus de la diagonale sont nuls :

S10

REMARQUES – On peut toujours calculer le produit de deux matrices carrées de même taille et le résultat est encore de même taille.

Propriété III.1.2

- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).
- Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale. Plus précisément on a :

$$\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \text{Diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n)$$

III.2 Puissances

La propriété d'associativité de la multiplication permet d'envisager de définir des **puissances** de matrices carrées.

♪ Définition III.2.1

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on définit A^k en posant :

$$A^0 = I_n \text{ et } A^k = A^{k-1} \times A$$

EXEMPLE – Calculer $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^3$

Q1 Déterminer une matrice B telle que $AB = I_2$.

S13

S14

☺ Théorème III.3.2

- Ce dernier théorème assure que la vérification faite dans l'exemple précédent (Q2) était inutile.
- Pour obtenir l'inverse d'une matrice carrée de taille n , nous avons résolu un système à n^2 inconnues, ce qui devient vite très fastidieux lorsque n augmente. En pratique, nous ne procéderons pas ainsi.

□ ✎ Exercice T.11

- A est inversible,
- $rg(A) = n$,
- $A \underset{L}{\sim} I_n$ (La matrice échelonnée réduite de A égale à la matrice identité)
- pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ le système $AX = B$ admet une unique solution,
- le système homogène $AX = [0]$ a pour seule solution la solution nulle,
- A est inversible à gauche (i.e. il existe A' telle que $A'A = I_n$), et dans ce cas on a $A' = A^{-1}$,
- A est inversible à droite (i.e. il existe A' telle que $AA' = I_n$) et dans ce cas on a $A' = A^{-1}$.

2. **Méthode de la matrice augmentée par I .** Ici pour inverser la matrice A , on va considérer la matrice augmentée $B = (A|I)$ où I est la matrice identité. On effectue alors les opérations élémentaires sur les lignes pour échelonner et réduire A . Si on tombe sur l'identité, c'est que A est inversible, et la deuxième partie de B est alors A^{-1} , sinon c'est que A n'est pas inversible. On pourra se référer à la vidéo Youtube de l'université de Grenoble : [Inverse par matrice augmentée](#). Exemple :

Calculer par cette méthode l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

S16

3. **Méthode du polynôme annulateur :** parfois, on peut s'apercevoir que la matrice A que l'on souhaite inverser annule un polynôme. Si celui-ci contient un terme constant, alors la matrice A est inversible et on peut exprimer A^{-1} à l'aide des puissances de A . Exemple :

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

Q 1 Vérifier que $A^2 - A - 2I_3 = 0$

Q 2 En déduire que A est inversible et donner la valeur de A^{-1} .

S17

☐ Exercice T.12

☐ Exercice T.13

☐ Exercice T.14

☐ Exercice T.15

☐ Exercice T.16

☐ Exercice T.17

☐ Exercice T.18