

PLANCHE T

CALCUL MATRICIEL

□ Exercice T1

Effectuer (quand c'est possible) les produits suivants :

$$\mathbf{Q1} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q2} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q3} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q4} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q5} \quad E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q6} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

□ Exercice T2

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Indiquer quels sont les produits entre deux de ces matrices qui ont un sens et donner la matrice produit le cas échéant.

□ Exercice T3

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} a & x & u \\ b & y & v \\ c & z & w \end{bmatrix}$ et les matrices :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Effectuer les produits PA , TA et DA et reconnaître dans chaque cas les opérations élémentaires sur les lignes effectuées sur la matrice A .

Pour info : les matrices « élémentaires » P , T , et D portent le nom de permutation, transvection et dilatation.

□ Exercice T4

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que l'on a :

$$(\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \quad AX = BX) \iff A = B$$

□ Exercice T5

On note $E_{i,j}$ la matrice carrée de $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé en ligne i , colonne j qui vaut 1.

Q1 Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Exprimer $ME_{i,j}$ à partir de M .

Q2 Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Exprimer $E_{i,j}M$ à partir de M .

□ Exercice T6

Calculer les puissances de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et de $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Pour info : les matrices M telles qu'il existe un entier n tel que $M^n = 0$ sont dites nilpotentes. Elles servent souvent dans la formule du binôme de Newton, voir exos suivants...

□ Exercice T7

Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Calculer U^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

□ Exercice T8

En utilisant la formule du binôme de Newton à deux matrices bien choisies, calculer les puissances des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□ Exercice T9

On souhaite calculer les puissances de la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Q1 Peut-on utiliser la formule du binôme ? Pourquoi ?

Q2 Calculer les premières puissances de A , conjecturer une formule puis la démontrer par récurrence.

□ Exercice T10

Q1 Soit A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si la j -ième colonne de A est nulle, que peut-on dire sur la matrice BA ?

Q2 En déduire qu'une matrice avec une colonne nulle ne peut pas être inversible.

□ Exercice T11

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Q1 Vérifier que Q est l'inverse de P .

Q2 Calculer $P^{-1}AP$

Q3 En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□ Exercice T12

On considère 4 réels a, b, c, d tels que $ad - bc \neq 0$.

Q1 Résoudre le système :
$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 & = y_1 \\ cx_1 + dx_2 & = y_2 \end{cases}$$

Q2 En déduire que la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est inversible et donner son inverse.

Q3 Application : donner l'inverse (éventuel) de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

□ Exercice T13

En utilisant la méthode du système linéaire, déterminer l'inverse (éventuel) de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

□ Exercice T14

En utilisant la méthode de la matrice augmentée déterminer l'inverse (éventuel) de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

□ Exercice T15

On considère la matrice : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Q1 Montrer que A annule un polynôme $P(X)$ de degré 2 que l'on déterminera (on pourra calculer A^2 puis l'exprimer en fonction de A et I_2).

Q2 En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I_2 et de A .

Q3 ★ Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par P (c'est à dire trouver un polynôme $R(X)$ de degré 1 tel qu'il existe un polynôme $Q(X)$ vérifiant $X^n = Q(X) \times P(X) + R(X)$). En déduire l'expression de A^n .

□ Exercice T16

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Q1 Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur pour A .

Q2 En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

□ Exercice T17

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + I_n$. Montrer que A est inversible.

□ Exercice T18

Calculer les inverses éventuels des matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$