

CHAPITRE

U



TSI¹

Lycée Artaud

2025/2026

Limites - Continuité

Sommaire

I Aspect local : limite et continuité	2
I.1 Limites	2
I.1.1 Limites à l'infini	2
I.1.2 Limites en un point	2
I.1.3 Limites à gauche et à droite	3
I.1.4 Opérations sur les limites	4
I.2 Continuité	4
I.2.1 Continuité en un point	4
I.2.2 Continuité à droite et à gauche	5
I.2.3 Lien entre continuité à droite, à gauche, et continuité tout court	5
I.2.4 Prolongement par continuité	5
I.2.5 Opérations et continuité	6
I.3 Propriétés des fonctions admettant une limite en $a \in \bar{I}$	6
I.3.1 Caractère localement borné	6
I.3.2 Passage à la limite dans une inégalité	6
I.4 Théorèmes d'existence de limites	7
I.4.1 Composition avec une suite	7
I.4.2 Théorème d'encadrement	8
I.4.3 Limite monotone	8
II Aspect global : continuité	9
II.1 Définition	9
II.2 Propriétés liées aux fonctions continues	9
III Quelques exos « en vrac »	11

I Aspect local : limite et continuité

On s'appuiera et généralisera les notions rencontrées dans le chapitre sur les suites...

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ (voire une réunion d'intervalles), non vide et non réduit à un point. On note $\bar{I}$ l'intervalle I auquel on a rajouté ses "bords" (on parle de l'*adhérence* de I).

Soit f une fonction définie sur I et $a \in \bar{I}$.

I.1 Limites

I.1.1 Limites à l'infini

Le vocable « à l'infini » est utilisé pour dire que $a = \pm\infty$. Ici cela se passe comme pour les suites !

♣ Définition I.1.1 (Limite finie en $+\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in I, (x \geq A \implies \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon)$$

♣ Définition I.1.2 (Limite infinie en $+\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in I, (x \geq A \implies f(x) \geq M)$$

À vous d'écrire les définitions au voisinage de $-\infty$.

S1

Interprétation graphique :

S2

I.1.2 Limites en un point

♣ Définition I.1.3 (Limite finie en $a \in \mathbb{R}$)

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

REMARQUES – Écrire sans valeur absolue :

S3

Interprétation graphique :

S4

Propriété I.1.4 (unicité)

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \{-\infty, +\infty\}$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$ alors $\ell = \ell'$.

Preuve

C'est peu ou prou la même que celle sur les suites...

□

♪ Définition I.1.5 (Limite infinie en $a \in \mathbb{R}$)

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \iff \forall M > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq M$$

I.1.3 Limites à gauche et à droite

Parfois on aura besoin de se limiter à droite ou à gauche d'un point. On définit alors :

♪ Définition I.1.6 (limite à gauche, limite à droite)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point de l'adhérence de I (c'est à dire dans I ou éventuellement sur le bord).

- On suppose qu'il existe $\eta > 0$ tel que $]a, a + \eta[\subset I$. On dit que f admet une limite à droite en a si la restriction de f à $]a, a + \eta[$ admet une limite en a . On note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \dots$
- On suppose qu'il existe $\eta > 0$ tel que $]a - \eta, a[\subset I$. On dit que f admet une limite à gauche en a si la restriction de f à $]a - \eta, a[$ admet une limite en a . On note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \dots$

EXEMPLE – Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Donner les limites à droite et à gauche de la fonction f en 1.

S5

I.2.2 Continuité à droite et à gauche

♪ Définition I.2.2

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point de I .

- On suppose qu'il existe $\eta > 0$ tel que $[a, a + \eta[\subset I$. On dit que f est continue à droite en a si la restriction de f à $[a, a + \eta[$ est continue en a , c'est à dire tend vers $f(a)$ en a .
- idem à gauche...

EXEMPLE – Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Étudier la continuité à droite et à gauche de la fonction f en 1.

S7

I.2.3 Lien entre continuité à droite, à gauche, et continuité tout court

Propriété I.2.3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point intérieur à I (c'est à dire qu'il existe $\eta > 0$ tel que $]a - \eta, a + \eta[\subset I$.

f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite de a

EXEMPLE – La fonction partie entière est-elle continue en 1 ?

S8

I.2.4 Prolongement par continuité

Dans le cas où a n'est pas dans I , mais quand même sur le bord, on peut envisager de prolonger la fonction en a par continuité :

Propriété I.2.4

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un réel dans $\bar{I} \setminus I$. Si f admet une limite **finie** ℓ en a , alors on peut prolonger f en la fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : I \cup \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

On dit dans ce cas que f se prolonge par continuité en a (et on notera souvent encore, par abus de langage, f cette fonction...)

EXEMPLE –

- Étudier le prolongement éventuel de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$.

S9

- Étudier le prolongement éventuel de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

S10

I.2.5 Opérations et continuité

La continuité étant un cas particulier de limite finie, tous les résultats vus sur les opérations sur les limites se traduisent en continuité en a .

Par exemple si f et g sont continues en a alors $f + g$ est aussi continue en a . À vous de voir les autres opérations...

☐ Exercice U.8

☐ Exercice U.9

I.3 Propriétés des fonctions admettant une limite en $a \in \bar{I}$

I.3.1 Caractère localement borné

Propriété I.3.1

Soit $a \in \bar{I}$. Si $f \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ avec $m < \ell < M$ alors au voisinage de a on a : $m < f(x) < M$ (c'est à dire f est bornée au voisinage de a).

En particulier si $\ell > 0$ alors au voisinage de a on a $f(x) > 0$.

REMARQUES –

- On a déjà vu ce résultat dans le chapitre sur les suites...
- En particulier si une fonction est continue en a , alors elle est bornée au voisinage de a .

I.3.2 Passage à la limite dans une inégalité

Propriété I.3.2

Soit f et g deux fonctions définies sur I avec limites respectives $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \bar{\mathbb{R}}$ en $a \in \bar{I}$.
Si au voisinage de a on a $f(x) < g(x)$ (ou $f(x) \leq g(x)$) alors $\ell \leq \ell'$.

EXEMPLE – Donner des exemples pour illustrer ce comportement :

S11

I.4 Théorèmes d'existence de limites

ATTENTION ! – Ne jamais écrire $\lim \dots$ ou faire de passage à la limite tant que l'existence de la limite n'a pas été prouvée.

I.4.1 Composition avec une suite

Un cas très courant et très utile :

☺ Théorème I.4.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et (x_n) une suite d'éléments de I qui tend vers a . Alors :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Preuve

On admettra ce résultat, mais la preuve serait bien sympa à faire ;-)

□

REMARQUES –

- Dans l'énoncé du théorème on a écrit « tend vers a » et non pas « converge vers a ». Pourquoi ?
.....
- La réciproque est fausse.
- Pour montrer que f ne tend pas vers ℓ lorsque $x \rightarrow a$, il suffit de trouver une suite (x_n) qui tend vers a et telle que la suite $(f(x_n))$ ne tend pas vers ℓ .
- Pour montrer que f n'admet pas de limite en a , il suffit de trouver deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers a telles que $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ tendent vers deux limites différentes.

EXEMPLE – Montrer que $f(x) = \sin(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

S12

Corollaire

Si f est **continue** en a :

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$$

Application : on utilise souvent ce corollaire quand on étudie une suite définie par récurrence et que l'on souhaite faire un passage à la limite.

Par exemple, supposons que :

- (u_n) vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $u_{n+1} = f(u_n)$,
- (u_n) converge vers ℓ (on a l'existence mais pas la valeur de ℓ),
- f est continue en ℓ .

Alors par passage à la limite on déduit que ℓ est nécessairement solution de l'équation $f(x) = x$.

EXEMPLE – Considérons la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ et $u_0 = 0$. Supposons que l'on ait déjà montré que (u_n) était convergente, déterminer sa limite :

S13

☐ Exercice U.10

☐ Exercice U.11

☐ Exercice U.12

I.4.2 Théorème d'encadrement

Propriété I.4.2

Soit f, g et h trois fonctions définies sur I vérifiant :

$$\forall x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Soit $a \in \bar{I}$. Alors :

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \bar{\mathbb{R}} \\ h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \bar{\mathbb{R}} \end{cases} \implies g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$$

EXEMPLE – Étudier la limite éventuelle en 0^+ de $f(x) = \sqrt{x} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

S14

☐ Exercice U.13

I.4.3 Limite monotone

☺ Théorème I.4.3 (limite monotone)

Soit $I =]a; b[$ avec a et b dans $\bar{\mathbb{R}}$ et f une fonction **monotone** sur I .
Alors f admet des limites (finies ou infinies) en a et en b .

II Aspect global : continuité

II.1 Définition

♪ Définition II.1.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point $a \in I$.
L'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou encore $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

REMARQUES – on ne parle ici de continuité que sur un *intervalle* I (et pas sur une réunion d'intervalles ou autre chose plus complexe...)

Propriété II.1.2 (Opérations)

Les 4 opérations usuelles ainsi que la composition conservent la continuité sur leur ensemble de définition.

EXEMPLE – Les fonctions de références suivantes qui sont toutes continues sur leur ensemble de définition :

- Les fonctions polynômes et les fonctions fractions rationnelles (quotient de fonction polynômes)
- Les fonctions trigonométriques
- les fonctions exponentielles, logarithmes, puissances (y compris puissances dans $\mathbb{Q}$).

□ Exercice U.14

II.2 Propriétés liées aux fonctions continues

☉ Théorème II.2.1 (valeurs intermédiaires)

Soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** et $(a, b) \in I^2$. Prenons un réel k quelconque entre $f(a)$ et $f(b)$.

- Cas général : il existe **au moins un** réel c entre a et b tel que $f(c) = k$.
- Cas des fonctions **strictement monotones** : il existe **un et un seul** réel c entre a et b tel que $f(c) = k$.

Preuve

| Voir planche exos... □

Application : C'est ce théorème que l'on a utilisé dans l'exercice consacré à la résolution par dichotomie d'une équation de la forme $f(x) = 0$ (vu dans le chapitre sur les suites et en info).

Corollaire

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

EXEMPLE – Voyons sur quelques exemples que divers comportements peuvent se produire :

- Soit $I = [0 ; 1]$ et $f = \exp$.

Alors $f(I) = \dots\dots\dots$

- Soit $I = \mathbb{R}$ et $f = \sin$.

Alors $f(I) = \dots\dots\dots$

- Soit $I = \mathbb{R}$ et $f = \arctan$.

Alors $f(I) = \dots\dots\dots$

- Soit $I = \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ et $f = \tan$.

Alors $f(I) = \dots\dots\dots$

- Soit $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Alors $f(I) = \dots\dots\dots$

On peut toutefois préciser un peu les choses avec :

☺ Théorème II.2.2 (image d'un segment)

L'image d'un segment (un intervalle fermé borné) par une fonction continue est un segment. Plus précisément, si $f \in \mathcal{C}([a ; b], \mathbb{R})$ alors $f([a ; b]) = [m ; M]$ avec :

$$m = \inf_{x \in [a;b]} f(x) = \min_{x \in [a;b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x \in [a;b]} f(x) = \max_{x \in [a;b]} f(x)$$

REMARQUES –

- m et M ne sont pas forcément $f(a)$ et $f(b)$.

- Il est essentiel que I soit fermé. Par exemple si $I =]0 ; 1]$ et $f = \ln$ alors $f(I) =]-\infty ; 0]$.

- On retiendra : **Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.**

☺ Théorème II.2.3 (Cas des fonctions strictement monotones)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction continue et strictement monotone sur I . On a :

- $f(I)$ est un intervalle
- f réalise une bijection de I sur $f(I)$
- La fonction réciproque de f , notée f^{-1} est aussi continue et de même sens de variation que f .
- Les représentations de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

EXEMPLE – Rappel : montrer que la restriction de la fonction $\sin$ à l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right]$ réalise une bijection de I vers $J = f(I)$ à déterminer. Dessiner les représentations graphiques.

S15

□ Exercice U.15

✍ Exercise U.16

□ ✎ Exercice U.17

☐ ✎ Exercice U.18

☐ ✎ Exercice U.19

□ Exercice U.20

III Quelques exos « en vrac »

□ Exercice U.21

☐ ✎ Exercice U.22

□ ✎ Exercice U.23

☐ ✎ Exercice U.24

☐ 📌 Exercice U.25