

PLANCHE U

LIMITES / CONTINUITÉ

Attention ! on n'écrit jamais $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots$ sans s'être assuré de l'existence de la limite.

À noter que dans $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, la lettre x est muette. On peut écrire $\lim_a f$.

□ Exercice U1 (Taux de variations classiques)

Q1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

Q2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Q3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Q4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

□ Exercice U2

Rappeler la formule de factorisation : $a^n - b^n = \dots\dots\dots$

Étudier les limites suivantes

Q1 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)$

Q3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2 + 4}$

Q5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x - \ln x}$

Q2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16}$

Q4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$

□ Exercice U3 (Changements de variable)

Q1 $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{1/x}$

Q2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x-2)}{\sqrt[3]{x}}$

Q3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/\sqrt{x}}}{x}$

□ Exercice U4 (Quantités conjuguées)

Q1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - x)$

Q3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} \right)$

Q2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x + \sqrt{x+1}} - \sqrt{x + \sqrt{x-1}})$

Q4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - ax)$

□ Exercice U5 (Taux de variations « masqués »)

Q1 $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{4x - \pi}$

Q3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{x}$

Q5 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{(a+x)^n - a^n}{x} \quad (a \in \mathbb{R})$

Q2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{x - 2}$

Q4 $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\arcsin x - \pi/6}{2x - 1}$

□ Exercice U6 (Formes $u(x)^{v(x)}$)

Q1 $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

Q2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$

Q3 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\tan x}$

□ Exercice U7 (Avec des ε)

Pour un réel ℓ donné, quelles sont les fonctions vérifiant :

Q1 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

Q2 $\forall \varepsilon \geq 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

Q3 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

Q4 $\exists \eta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

□ Exercice U8 (Prolongement par continuité)

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

Q1 $x \mapsto x \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$

Q2 $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

Q3 $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$

□ Exercice U9 (Prolongement par continuité)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0, f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$.

Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}^*$, puis étudier la continuité à droite et à gauche de f en 0.

□ Exercice U10

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$.

Q1 Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, f(2^{-n}x) = f(x)$.

Q2 En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

□ Exercice U11 (Limite de fonction et suites)

En utilisant des suites, montrer que la fonction $x \mapsto \cos(x) + \cos(2x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

□ Exercice U12 (Continuité et suites)

Q1 Soit I un intervalle borné. On considère une fonction f définie sur I , continue, croissante telle que I est stable par f et qu'il existe un unique $\alpha \in \bar{I}$ vérifiant $f(\alpha) = \alpha$.

Que dire de la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$? Justifier rigoureusement...

Q2 On considère la fonction f définie sur $I = [0; 2[$ par $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{x}{2} + 1$ et on définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrer que $I = [0; 2[$ est stable par f .

b. Montrer que f est croissante sur I puis que (u_n) est aussi croissante.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2 - \frac{1}{2^n}$, et en déduire la limite ℓ de (u_n) .

d. A-t-on $\ell = f(\ell)$? Est-ce contradictoire ?

□ Exercice U13 (Encadrements)

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + \sin x)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x} + \sin x}} \sum_{k=1}^n \cos^k(kx) \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} 3x \sin^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ envisager $0+$ et $0-$?

□ Exercice U14 (Continuité globale)

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

□ Exercice U15 (Preuve du théorème des valeurs intermédiaires)

Afin de comprendre l'esprit de la démonstration sans trop de technicité, on se contentera de montrer ici :
Si f continue sur $[a, b]$ avec $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Notons $\alpha_0 = a$ et $\beta_0 = b$, puis si $c_n = \frac{\alpha + \beta}{2}$ on construit :

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{si } f(c_n) \leq 0 \\ \alpha_n & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} = \begin{cases} \beta_n & \text{si } f(c_n) \geq 0 \\ c_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q1 Vérifier que les suites (α_n) , (β_n) et (c_n) sont bien définies.

Q2 Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_n) \leq 0$ et $f(\beta_n) \geq 0$.

Q3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = \frac{\beta_n - \alpha_n}{2}$ et en déduire la limite de $(\beta_n - \alpha_n)$.

Q4 Montrer que (α_n) est croissante et que (β_n) est décroissante.

Q5 Conclure.

□ Exercice U16

Un marcheur parcourt 12 km en une heure.

Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure au cours duquel il parcourt exactement 6 km.

□ Exercice U17

Soit f continue sur $[a, b]$, et p, q deux réels positifs tels que $(p, q) \neq (0, 0)$.

Montrer que : $\exists c \in [a, b] / pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$.

□ Exercice U18

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Que peut-on dire?

□ Exercice U19

Soit f une fonction T -périodique définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

□ Exercice U20 (Théorème des valeurs intermédiaires généralisé)

Q1 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.

Q2 Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair admet au moins une racine réelle.

Q3 Montrer que l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.
Montrer ensuite que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

□ Exercice U21 (Suite implicite)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1+e^x} + nx \end{cases}$

Q1 Déterminer l'ensemble de définition de f_n et dresser son tableau de variations.

Q2 Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in \mathbb{R}$.

Q3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n} < u_n < 0$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

□ Exercice U22

Soit f une fonction T -périodique continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

□ Exercice U23 (Un théorème de point fixe)

Soit a et b deux réels, tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue.

Montrer que f admet un point fixe. (*Idée : utiliser « astucieusement » le théorème des valeurs intermédiaires...*)

□ Exercice U24

Montrer que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$ possède un minimum sur $\mathbb{R}$.

□ Exercice U25

On considère la fonction $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{x+1} \sin x$. Quelle est l'image de f , c'est à dire que vaut $f([0; +\infty[)$?