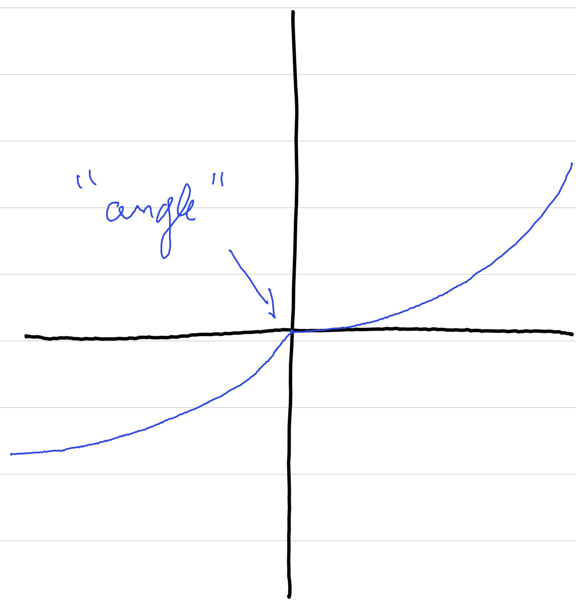
V10 On a vu en V6 Q1 que f était continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, mais non dérivable en 0.

En revanche, sur $\mathbb{R}^*$ elle est $\mathcal{C}^\infty$ (opération sur f : $\mathcal{C}^\infty$)



VII $f(x) = e^{-1/x^2}$ et $f(0) = 0$.

Q1. * f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

* En 0 : montrons que f est dérivable puis que f' continue :

• $\tau_0(h) = \dfrac{e^{-1/h^2}}{h} \underset{\substack{t=\frac{1}{h^2} \\ h=\frac{\pm 1}{\sqrt{t}} \\ t\to+\infty \\ h\to 0}}{=} \pm\sqrt{t}\,e^{-t}$

D'où $\tau_0(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ (Croiss. comp.)

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

• $\forall x \neq 0$: $f'(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (m̄ justif)

donc f' est continue en 0.

Concl : $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

Q2. Init : • $f^{(0)} = e^{-1/x^2} = \dfrac{P_0(x)\,e^{-1/x^2}}{x^{3\times 0}}$ avec $P_0 = 1$

Héréd : On supp. la formule vraie pour n et on la montre pour $n+1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n+1)}(x) = f^{(n)\prime}(x) = \left(\frac{P_n(x)e^{-1/x^2}}{x^{3n}}\right)'$$

$$= \left(\frac{P_n(x)}{x^{3n}}\right)' e^{-1/x^2} + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \times \frac{-2}{x^3} e^{-1/x^2}$$

$$= \frac{P_n'(x)x^{3n} - P_n(x)\times 3n\,x^{3n-1}}{x^{3n}\times x^{3n}} e^{-1/x^2} - \frac{2P_n(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-1/x^2}$$

$$= \frac{e^{-1/x^2}}{x^{3(n+1)}} \left(\frac{P_n'(x)x^{3n} - P_n(x)\times 3n\,x^{3n-1}}{x^{3n-3}} - 2P_n(x)\right)$$

$$= \frac{e^{-1/x^2}}{x^{3(n+1)}} \left(\underbrace{x^3 \times P_n'(x) - P_n(x)\times 3n \times x^2 - 2P_n(x)}_{P_{n+1}(x)}\right)$$

Concl : $\boxed{\forall n,\ \exists \text{ poly } P_n \ /\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)\,e^{-1/x^2}}{x^{3n}}}$

Q3. * f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (opérations).

et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\,e^{-1/x^2}}{x^{3n}}$$

* En 0 : on pose $f^{(n)}(0) = 0$.

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{P_n(x)\,e^{-1/x^2}}{x^{3n+1}} \xrightarrow[0]{} 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est dérivable en 0.

D'où $\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}$

VI2 $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$, $I_1 =]0, \frac{\pi}{2}]$

* f est dérivable sur I_1 et $\forall x \in I_1$, $f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} \leq 0$

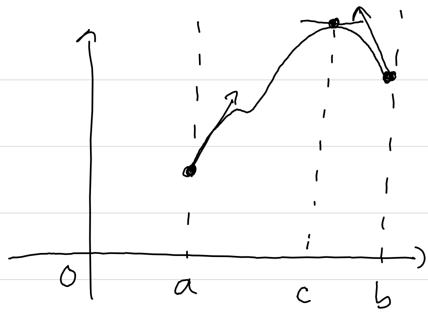
La dérivée est négative et ne s'annule qu'une fois, donc f est strictement décroissante sur I_1. Elle réalise donc une bijection de I_1 vers $I_2 = [f(\frac{\pi}{2}) ; f(0)[= [1, +\infty[$

* On a : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) \neq 0$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$
Ainsi f^{-1} est dérivable pour tout $x \in I_2$ sauf pour $x = f(\frac{\pi}{2}) = 1$.

f^{-1} dérivable sur $J =]1 ; +\infty[$

* $\forall x \in J$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = -\dfrac{\sin^2(f^{-1}(x))}{\cos(f^{-1}(x))}$

(V13) Situation :



Étape 1 :

f est continue sur le segment $[a,b]$, donc elle atteint son maximum M en $c \in [a,b]$.

Étape 2 : montrons que $c \in]a,b[$:

* Supp. par l'absurde $c = a$: $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \leq f(a) = M$

On a : $\forall x \in]a,b[$:

$$\tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\overbrace{f(x)-M}^{\ominus}}{\underbrace{x-a}_{\oplus}} \leq 0$$

Or $\tau_a(x) \xrightarrow[x \to a]{} f'(a) > 0$, contradiction.

donc $c \neq a$.

* Même preuve si $c = b$: .... donc $c \neq b$.

On déduit que le max est atteint pour $c \in]a,b[$.

Étape 3 : conclusion.

D'après le th. sur les extremums, puisque le max est atteint à l'intérieur, on déduit que $f'(c) = 0$. avec $c \in]a,b[$.