V21 * Mq $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.

- Si $0 \leq x$:

Soit $f(x) = \sin x$, f est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on applique l'IAF sur $[0, x]$:

$$|f(x) - f(0)| \leq \sup_{t \in [0,x]} |f'(t)|\,|x - 0|$$

Or $|f'(x)| = |\cos x| \leq 1$

Donc $\forall x \geq 0$ $|\sin x| \leq |x|$

- Si $x \leq 0$: posons $t = -x \geq 0$.

Alors $|\sin(t)| \leq |t|$

(ie) $|-\sin x| \leq |-x|$

(ie) $|\sin x| \leq x$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$ $|\sin x| \leq |x|$
(inégalité intéressante lorsque x proche de 0)

* Mq $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

Soit $f(x) = \ln(1+x)$, f est $\mathcal{C}^1(]-1, +\infty[)$.

- Pour $x \geq 0$:

$$f(x) - f(0) \leq \sup_{t \in [0,x]} (f'(t)) \times (x - 0)$$

Or $f'(t) = \dfrac{1}{1+t} \leq 1$. Donc $\forall x \geq 0$ $f(x) \leq x$.

(ie) $\ln(1+x) \leq x$, $\forall x \geq 0$

- Pour $-1 < x \leq 0$:

$$f(0) - f(x) \geq \inf_{t \in [x,0]} (f'(t)) \times (0 - x)$$ ⚠

Or $f'(t) = \dfrac{1}{1+t}$

$$\left(\begin{array}{c} x \leq t \leq 0 \\ 0 < 1+x \leq 1+t \leq 1 \\ \dfrac{1}{1+x} \geq \dfrac{1}{1+t} \geq 1 \end{array} \right)$$

donc $1 \leq f'(t) \leq \dfrac{1}{1+x}$

Donc $\inf_{t \in [x,0]} (f'(t)) \geq 1$

On a donc : $-f(x) \geq 1 \times (-x)$

(ie) $\ln(1+x) \leq x$ $\forall x \leq 0$

V22

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\tau_{x_0}(x)\right| = \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq k\,|x-x_0|^{\alpha-1}$$

Or $\alpha - 1 > 0$ donc $\lim\limits_{x \to x_0} k|x-x_0|^{\alpha-1} = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to x_0} \tau_0(x) = 0$.

Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$.

Donc $f' \equiv 0$

Donc $\boxed{f \text{ est constante}}$

(V24) **Q1.** Soit $f(x) = \arcsin(1-x^4)$ $x \in [-1,1]$.

$$\tau_0(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

* Soit $x > 0$:

Puisque $f \in \mathcal{C}^0\ ]-1,1[$, et dériv. sur $]0,1[$, IAF sur $[0,x]$

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leq \sup_{t\in[0,x]} |f'(t)|$$

Or $f'(t) = \dfrac{-4t^3}{\sqrt{1-(1-t^4)^2}} = \dfrac{-4t^3}{\sqrt{2t^4-t^8}} = \dfrac{-4t^3}{t^2\sqrt{2-t^4}}$

D'où $|f'(t)| = \left|\dfrac{4t}{\sqrt{2-t^4}}\right| \leq 4x$ car $x \in [0,1]$ et $t \in [0,x]$

Ainsi : $\tau_0(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

donc f dérivable à droite de 0 et $f'_d(0)=0$

* Soit $x<0$: f étant paire, on déduit que f est dérivable à gauche de 0 et $f'_g(0)=0$

Conclusion : $\boxed{f \text{ dérivable en } 0}$

Q2. Soit $f(x) = \arcsin(1-x^2)$

* $\forall x>0$: $f'(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} = \dfrac{-2x}{\sqrt{+2x^2-x^4}} = \dfrac{-2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$

$f'(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{2-x^2}}$ (car $x>0$)

TAF : $f(x)-f(0) = f'(c)(x-0)$ $c\in[0,x]$

Si $x\to 0$ il vient : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c) \longrightarrow \dfrac{-2}{\sqrt{2}}$

Donc f dérivable à dte et $f'_d(0) = \dfrac{-2}{\sqrt{2}}$.

* De même si $x<0$: Par parité :

$f(x) = f(-x)$ donc $f'(x) = -f'(-x)$
$= +\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$ $(x<0)$

et $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

Donc f dérivable à gauche de 0 et $f'_g(0) = \dfrac{+2}{\sqrt{2}}$

Conclusion : $\boxed{f \text{ non dérivable en } 0.\ (f'_g(0) \neq f'_d(0))}$