Planche W
Polynômes

☐ Exercice W1

Q 1 Déterminer tous les Polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $PQ = 1$.

Q 2 Quel est le degré du polynôme $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - 2k + 1)^k$

☐ Exercice W2

Q 1 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P(X) = (X + 1)^n$.

a. Développer P^2, de manière directe puis par la formule des polynômes produits.

b. Par identification des coefficients de degré n, déterminer l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Q 2 Soit $Q(X) = (X - 2)^n - (X + 5)^n$. Donner le degré et le coefficient dominant de Q.

☐ Exercice W3

Q 1 Montrer que la famille $\mathcal{F} = (X - 1, X + 1, X^2 - 1)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.
En est-il de même pour $\mathcal{F} \cup \{1\}$?

Q 2 Montrer que $Q = X^2$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire d'éléments de la famille $\mathcal{F}$.

☐ Exercice W4 (Python)

En informatique, une façon simple de représenter un polynôme est d'utiliser un tableau indexé à partir de 0. Ainsi chaque case d'indice i représente le coefficient de degré i. Ce n'est pas la seule représentation possible, ni la plus performante, mais sans doute la plus simple.
En python, on peut utiliser des *listes* à la place des tableaux…

Q 1 Écrire une fonction python `somme_P(a,b)` qui reçoit deux listes (représentant deux polynômes) et qui renvoie une liste représentant la somme des deux polynômes.

Q 2 Écrire une fonction python `produit_P(a,b)` qui reçoit deux listes (représentant deux polynômes) et qui renvoie une liste représentant le produit des deux polynômes.

Q 3 Écrire une fonction python `affiche_P(a)` qui reçoit une liste (représentant un polynôme) et qui affiche son écriture avec l'indéterminée X (Par exemple : `3X^2+(-2)X^1+1X^0` ou mieux : `3X^2-X+1`)

☐ Exercice W5 (Divisions euclidiennes)

Q 1 Division euclidienne de $A = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X + 5$ par $B = X^2 + X + 4$

Q 2 Division euclidienne de $A = X^3 + X^2 - 1$ par $B = X - 1$.

Q 3 Division euclidienne de $A = X^n$ par $B = X - 1$ *(Penser somme et suite géométrique…)*

☐ Exercice W6 (Divisions euclidiennes)

Déterminer les éventuels réels λ et μ pour lesquels le polynôme $D(X) = X^2 + 2$ divise le polynôme $P(X) = X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
(Indic : introduire Q tel que $P = Q \times D$. Réponse : $\lambda = 0$ et $\mu = 3/2$)

□ Exercice W7 (Divisions euclidiennes)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$.

Q 1 Trouver le reste de la division de P par $X^2 - 1$.

Q 2 Trouver le reste de la division de P par $(X+1)^2$.

□ Exercice W8 (Preuve de la formule de Taylor)

On rappelle la formule de Taylor pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$:

$$\boxed{P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k}$$

Q 1 Vérifier que celle-ci est équivalente à : $P(X+a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$

Q 2 Montrer que cette formule est vraie si $P = A_p = X^p$.

Q 3 Notons $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_p X^p$ et $A_p = X^p$ et supposons d'après la question précédente que pour tout p on ait : $A_p(X+a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{A_p^{(k)}(a)}{k!} X^k$.
Montrer alors que la formule est vraie pour P.

□ Exercice W9 (Taylor)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On considère un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\begin{cases} P(a) > 0 \\ \forall\ k \in \mathbb{N}^*, \quad P^{(k)}(a) \geqslant 0 \end{cases}$

Montrer que P ne s'annule pas sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

□ Exercice W10 (Polynôme dérivé)

(Indication : utiliser un raisonnement de type « analyse /synthèse ». Ici on commencera par trouver une condition nécessaire sur le degré de P.)

Q 1 Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Q 2 Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $(X^2+1)P'' - 6P = 0$.

Q 3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $X^2P'' + XP' + P = X^n$.

□ Exercice W11 (Polynôme dérivé)

Q 1 On considère la fonction polynôme $p(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$. Déterminer, pour tout $x \neq 1$, une expression sans $\sum$ de p, puis en déduire une expression sans $\sum$ de la fonction polynôme $q(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

Q 2 Même question avec $r(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 x^k$.

□ Exercice W12 (Racines)

Q 1 La fonction sin est-elle une fonction polynomiale ?

Q 2 La fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$ est-elle polynomiale ?

Q 3 La fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = e^z$ est-elle polynomiale ? *(on pourra regarder les racines de f(z)-1...)*

Q 4 Déterminer l'ensemble des polynômes périodiques.

□ Exercice W13 (Racines et divisibilité)

Q 1 Le polynôme $P = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$ est-il divisible par $Q = X^2 - 3X + 2$?

Q 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $Q = X^2 - X + 1$.

□ Exercice W14 (Racines multiples)

Q 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$.

Q 2 Montrer que $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$ admet 2 pour racine. Déterminer sa multiplicité et trouver les autres racines.

Q 3 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que α est une racine d'ordre m de P si et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine d'ordre m de P.

□ Exercice W15 (Factorisation dans $\mathbb{C}$)

Q 1 Décomposer $X^n + 1$ en un produit de polynômes de $\mathbb{C}_1[X]$.

Q 2 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ fixé et $P = X^3 + (1-\alpha)(X^2 + X) - \alpha$. Pourquoi peut-on assurer que P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$? Déterminer cette factorisation.*(Indication : calculer $P(\alpha)$)*

□ Exercice W16 (Factorisation dans $\mathbb{R}$)

Q 1 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de $P = X^8 - 1$

Q 2 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de $Q = X^5 + 1$

□ Exercice W17 (Factorisations)

Factoriser les polynômes réels suivants dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$, en produits de facteurs irréductibles :

$$P = X^3 - 1 \qquad Q = X^6 + 2X^3 + 1 \qquad R = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1 \qquad S = 4X^3 - 3X + 1$$

□ Exercice W18 (Relation coefficients / racines)

En utilisant une équation du second degré, trouver deux nombres dont la somme vaut $\dfrac{1}{6}$ et le produit $-\dfrac{1}{6}$.

□ Exercice W19 (Relation coefficients / racines)

Q 1 Considérons un polynôme $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c = (X-x)(X-y)(X-z)$ scindé. En développant la deuxième expression de P, montrer que $x+y+z = -a$, que $xy + xz + yz = b$ et que $xyz = -c$.

Q 2 Soit le système (S) : $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ xy + yz + zx = 1 \\ xyz = 1 \end{cases}$

a. Déterminer un polynôme dont les racines sont des solutions x, y et z de (S).

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système (S). Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système (S).

□ Exercice W20 (Relation coefficients / racines)

En considérant le polynôme $P = X^n - 1$, retrouver les formules donnant la somme et le produit des racines n^{ieme} de l'unité pour $n \geqslant 2$ vues dans le chapitre nombre complexes.

□ Exercice W21 (Un classique)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P = (X+1)^n - (X-1)^n$.

Q 1 Déterminer le degré de P et son coefficient dominant.

Q 2 Déterminer ses racines complexes *(on notera ω_0, ..., ω_{n-1} les racines n-ième de l'unité).*

Q 3 En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

□ Exercice W22 (Un autre classique)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, **scindé** sur $\mathbb{R}$.

Q 1 Montrer que P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$ *(On pourra éventuellement commencer par le cas où toutes les racines sont distinctes).*

Q 2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que le polynôme $P^2 + \lambda^2$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.