CHAPITRE

$\mathscr{W}$

TSI[1]

Lycée Artaud

20254/2026

Polynômes

Sommaire

$\mathbb{K}$ désignera comme souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Notion de polynôme

I.1 Définitions

Un polynôme est un *objet algébrique* qu'il ne faut pas confondre avec les fonctions polynômes qui font partie de l'*analyse*. On verra le lien un peu plus loin...

Définition I.1.1

- On appelle **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute suite $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang. C'est à dire que l'on peut voir un polynôme comme un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$.
- Si A est un polynôme non nul, on appelle **coefficient dominant** le dernier élément non nul. Si celui-ci vaut 1, on parle de *polynôme unitaire*.

Définition I.1.2 (Notation usuelle)

- On définit le polynôme $X = (0, 1, 0, \dots)$ (X s'appelle l'indéterminée).
- On pose $X^0 = (1, 0, 0, \dots)$ et $\forall k \in \mathbb{K}^*$, $X^k = (0, \dots, 1, 0, \dots)$ où le 1 est placé en $(k+1)$-ième position.
- Tout polynôme $P = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ peut alors s'écrire : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
- On notera $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

I.2 Opérations

- L'addition et la multiplication par un scalaire sont font naturellement, c'est à dire terme à terme. Prenons par exemple $P_1(X) = 1 + 2X + 3x^3$ et $P_2(X) = X - X^2$. Si $\lambda = 2$ alors on a :

  $\lambda P_1(X) =$ ....

  $P_1(X) + P_2(X) =$ ....

- La multiplication ne se fait pas terme à terme (mais on a l'habitude...).
  Si $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ alors on pose $AB = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$.
  Par exemple, déterminons $P_1(X) \times P_2(X)$

  S1

- On verra la division dans un paragraphe un peu plus loin.

Olivier **BRÉBANT**
Lycée Artaud – 20254/2026

I.3 Degré d'un polynôme

Définition I.3.1 (Dégré)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

- Si P est non nul alors $\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N} \ / \ a_k \neq 0\}$
- Si P est nul alors on pose $\deg(P) = -\infty$

Propriété I.3.2 (Opérations)

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

- $\deg(P) \leqslant 0 \iff P$ constant.
- $\deg(P+Q) \leqslant \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$. De plus il y a égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Conséquences : l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est stable par combinaison linéaire, on le note $K_n[X]$. *(On verra bientôt que c'est un espace vectoriel...)*

Propriété I.3.3

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.

$$PQ = 0 \iff P = 0 \text{ ou } Q = 0$$

Preuve

Faire un raisonnement sur les degrés (et penser à la contraposée si besoin...)

S2

☐

☐ ✍ **Exercice W.1** ☐ ✍ **Exercice W.2** ☐ ✍ **Exercice W.3** ☐ ✍ **Exercice W.4**

II Divisibilité et division euclidienne

Définition II.0.1

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.
On dit que Q est un diviseur de P (ou que P est un multiple de Q) s'il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = AQ$$

REMARQUES –

- « Q divise P » se note souvent $Q|P$
- Si Q divise P alors $\deg(Q) \leqslant \deg(P)$.

EXEMPLE – Quels sont les polynômes divisant le polynôme nul ? ....

☺ Théorème II.0.2 (Division euclidienne)

Soit A et B dans $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.
Il existe un *unique* couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B)$$

Q s'appelle le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

EXEMPLE – Pour $A \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, le reste de la division euclidienne de A par $(X - \alpha)$ est $A(\alpha)$ (c'est une écriture dans laquelle on a substitué l'indéterminée par α.)

S3

REMARQUES – Si l'on a besoin que du **reste** de la division euclidienne de A par B, on vient de voir sur cet exemple que l'on n'a pas vraiment besoin de connaître le quotient, il suffit d'utiliser les *racines* de B... *(voir exercices)*

MÉTHODE – Pour effectuer une division euclidienne de deux polynômes on va mettre en évidence deux méthodes sur un exemple : division euclidienne de $X^3 + 5X - 4$ par $X^2 - X + 1$:

S4 Méthode 1 : avec la définition

S5 Méthode 2 : avec une division « posée »

☐ ✍ **Exercice W.5** ☐ ✍ **Exercice W.6** ☐ ✍ **Exercice W.7**

III Polynôme et fonction polynomiale

III.1 Fonction polynomiale

♪ Définition III.1.1

Soit $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. La **fonction** $\tilde{A}$ définie pour tout $x \in \mathbb{K}$ par :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{A}: & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$$

est appelée fonction polynôme associée à A.

En pratique on confondra souvent le polynôme A et sa fonction polynôme associée $\tilde{A}$ que l'on notera aussi souvent A, mais il faut garder à l'esprit que ce sont deux objets de nature différente.

III.2 Polynôme dérivé et formule de Taylor

♪ Définition III.2.1 (Polynôme dérivé)

Si $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit le **polynôme dérivé** de A, noté A', le polynôme :

$$A' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

Remarques – Cela coïncide exactement avec la dérivée de la fonction polynôme associée à A. Ainsi la dérivée d'une combinaison linéaire de polynômes, ou encore d'un produit de polynômes s'obtient comme en analyse (en identifiant polynôme et fonction polynôme). On obtient aussi le résultat suivant sur les dérivées successives :

Propriété III.2.2 (Dérivées successives)

Si $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, alors $\tilde{A} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et on a :

$$A^{(j)}(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{(k-j)!} X^{k-j} & \text{si } j \leqslant n \\ 0 \text{ si } j > n \end{cases}$$

On retiendra la formule de Taylor :

Propriété III.2.3 (Formule de Taylor)

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$ on a :

$$\boxed{P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k}$$

Preuve

Voir exercice... □

Exemple – Déterminer tous les polynômes tels que $P(1) = 1$, $P'(1) = 3$, $P''(1) = 8$ et $P^{(n)}(1) = 0$ si $n \geqslant 3$:

S6

□ ✍ **Exercice W.8** □ ✍ **Exercice W.9** □ ✍ **Exercice W.10** □ ✍ **Exercice W.11**

III.3 Racines / Zéros

III.3.1 Racines « simples »

♪ Définition III.3.1 (racines)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Dire que le nombre $a \in \mathbb{K}$ est une **racine** de P (ou encore un zéro) signifie que $P(a) = 0$.

Propriété III.3.2 (Caractérisation)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$P(a) = 0 \iff (X-a)|P$$

Preuve

Idée : la division euclidienne donne $P = Q \times (X-a) + R$. Alors $(X-a)|P \iff R = 0$. Il reste à substituer a à X... □

Propriété III.3.3 (Factorisation 1)

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ admet n racines *distinctes* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = Q \times \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$$

Remarques – Dans la propriété précédente, si $\deg P = n$ alors $Q \in \mathbb{K}$.

Applications :

- Tout polynôme non nul P admet au plus $\deg(P)$ racines (et on verra mieux un peu plus loin...)
- Le seul polynôme avec une infinité de racine est le polynôme nul (très utile pour montrer qu'un polynôme est nul...)
- Si deux polynômes P et Q coïncident sur une partie de $\mathbb{K}$ de cardinal supérieur strict au maximum de $\deg(P)$ et $\deg(Q)$ alors P et Q sont égaux.

III.3.2 Ordre de multilplicité d'une racine

♪ Définition III.3.4

Soit P un polynôme non nul et α une racine de P. On appelle **ordre de multiplicité** de α le plus grand entier naturel $m \geqslant 1$ tel que $(X-\alpha)^m | P$. On dit que « α est racine d'ordre m de P »

Remarques – L'ordre de multiplicité est toujours inférieur ou égal au degré.

Propriété III.3.5 (immédiates)

Soit P un polynôme non nul, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$.
α est une racine d'ordre de multiplicité m de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que $Q(\alpha) \neq 0$ et $P = (X-\alpha)^m Q$.

Propriété III.3.6 (Factorisation 2)

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ admet q racines $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ d'ordre de multiplicité au moins $m_1, \dots, m_q$, alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = Q \times \prod_{k=1}^{q} (X-\alpha_k)^{m_k}$$

Remarques – Un polynôme P possède donc au plus $\deg(P)$ racines *comptées avec leur ordre de multiplicité*. Un cas particulier est le cas des polynômes dits *scindés* :

♪ Définition III.3.7 (Polynôme scindé)

Un polynôme non nul est dit **scindé** si la somme des ordres de multiplicité de ses racines est égal à son degré, c'est à dire si P est soit constant, soit s'écrit sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{q} (X-a_k)^{m_k} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

Propriété III.3.8 (Caractérisation de l'ordre de multilplicité)

Soit P un polynôme non nul, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$.

$$\alpha \text{ racine d'ordre } m \text{ de } P \iff \begin{cases} \forall j \in [\![0, m-1]\!],\ P^{(j)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Preuve

S7

☐

☐ ✍ **Exercice W.12** ☐ ✍ **Exercice W.13** ☐ ✍ **Exercice W.14**

IV Factorisation et polynômes irréductibles

IV.1 Polynôme irréductible

Définition IV.1.1 (polynôme irréductible)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- On appelle **polynôme associé** à P tout polynôme de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
- On dit que P est un **polynôme irréductible** s'il est de degré supérieur ou égal à 1 et si ses seuls diviseurs sont 1, P et leurs polynômes associés.

Remarques – Si P est irréductible avec $P = AB$ que dire sur le degré des polynômes A et B ?

S8

Propriété IV.1.2

Si $\deg(P) = 1$ alors P est irréductible.

Preuve

S9

☐

EXEMPLE – Existe-t-il des polynômes irréductibles possédant des racines ? Si oui quels sont-ils ?

S10

EXEMPLE – $P = X^2 + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$?

S11

EXEMPLE – Existe-t-il des polynômes réductibles ne possédant pas de racines ?

S12

IV.2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

☺ Théorème IV.2.1 (fondamental de l'algèbre, ou de D'Alembert-Gauss)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}$.

REMARQUES – En d'autres termes cela signifie que tout polynôme non constant admet des racines dans $\mathbb{C}$.

Propriété IV.2.2 (Factorisation)

Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ possède **exactement** $\deg(P)$ racines complexes comptées avec leur ordre de multiplicité.
Plus précisément on peut toujours factoriser P sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{q} (X - \alpha_k)^{m_k}$$

avec λ : coefficient dominant, α_k : racines distinctes de multiplicité m_k et q le nombre de racines deux à deux distinctes.

Propriété IV.2.3 (Corollaire)

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

EXEMPLE – En utilisant les racines et la factorisation, montrer que $A = X^2 + X + 1$ divise $B = X^8 + X^4 + 1$:

S13

☐ ✍ **Exercice W.15**

IV.3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Propriété IV.3.1 (Polynômes irréductibles)

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :

- Les polynômes de degré 1
- Les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif ($\Delta < 0$).

Preuve

S14

Remarques – On pourrait démontrer que tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ peut s"'écrire sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{j=1}^{p} (X - \alpha_j)^{m_j} \prod_{k=1}^{q} (X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{n_k}$$

avec $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$ pour tout k.

Exemple – Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ le polynôme $P = X^4 + 1$:

Méthode 1: classiquement utiliser les nombres complexes et les racines de P

S15

Méthode 2: en utilisant les complexes en remarquant que $1 = -i^2$

S16

Méthode 3: avec une astuce, en remarquant que $X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2$

S17

☐ ✍ Exercice W.16 ☐ ✍ Exercice W.17

IV.4 Relation entre coefficients et racines

On rappelle qu'un polynôme est dit scindé s'il est constant non nul ou si c'est le produit de polynômes de degré 1.

Propriété IV.4.1

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n, scindé sur $\mathbb{K}$.

- La somme des racines de P vaut : $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$.
- Le produit des racines de P vaut : $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Exemple – Si $\deg(P) = 2$, $P = aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$ on a :

S18

Preuve

On procède par identification :

S19

☐

Exemple – Déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 dont la somme vaut -1 et le produit vaut 2 :

S20

☐ ✍ Exercice W.18 ☐ ✍ Exercice W.19 ☐ ✍ Exercice W.20