CHAPITRE

$\mathscr{L}$

TSI[1]

Lycée Artaud

2025/2026

Applications linéaires

Vous connaissez depuis longtemps les *fonctions linéaires*, c'est à dire les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par une expression du type $f(x) = ax$ où a est un réel fixé. Vous savez (et il est facile de le vérifier en remplaçant...) qu'elles ont la propriété particulière que $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.
On va généraliser dans ce chapitre cette notion, mais pour des applications de E dans F où E et F sont des espaces vectoriels quelconques...

Sommaire

I Applications linéaires, généralités

I.1 Définitions

♪ Définition I.1.1 (Définition)

E est F sont des $\mathbb{K}$-ev. L'application $u : E \to F$ est une **application linéaire** si :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \quad u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Vocabulaire : de telles applications sont aussi appelées *morphismes d'espaces vectoriels* avec en particulier :

- **endomorphismes :** ....
- **isomorphismes :** ....
- **automorphismes :** ....

Exemple –

- L'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est linéaire si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet :

S1

- Soit $X \subset \mathbb{R}$, et $a \in X$. Alors l'application $\varphi_a : f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{R}) \mapsto f(a) \in \mathbb{R}$ est une application linéaire de $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

S2

- L'application *dérivation* $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty$.

S3

- L'application $I : f \in \mathscr{C}([a,b]) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ est une application linéaire.

S4

Vocabulaire – si E est un $\mathbb{K}$-ev, les éléments de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ sont appelés *formes linéaires*. Attention au faux amis sur la notation, car ce que l'on note E^* c'est $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ et non pas $E \backslash \{0\}$!

Olivier BRÉBANT
Lycée Artaud – 2025/2026

Propriété I.1.2

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

- Si G est un s-ev de E alors $u(G) = \{u(x), x \in G\}$ est un sev de F.
- Si H est un s-ev de F alors $u^{-1}(H) = \{x \in E, u(x) \in H\}$ est un sev de E.

Preuve

Voyons le point 1 (le point 2 sera traité en exercice) :

S5

☐

☐ ✍ **Exercice Z.1** ☐ ✍ **Exercice Z.2** ☐ ✍ **Exercice Z.3** ☐ ✍ **Exercice Z.4**

I.2 Noyau et image

♪ Définition I.2.1

Soit u une application linéaire de E dans F.

- Le **noyau** de u, noté $Ker(u)$, est : $Ker(u) = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E / u(x) = 0\}$
- L'**image** de u, notée $Im(u)$, est $Im(u) = u(E) = \{u(x), x \in E\}$

Propriété I.2.2

Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sev.

Preuve

S6

☐

☺ Théorème I.2.3 (injectivité)

L'application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective si et seulement si $Ker(u) = \{0\}$.

Preuve

S7

☐

EXEMPLE – L'application linéaire *dérivation* est-elle injective ? ....

....

☐ ✍ **Exercice Z.5** ☐ ✍ **Exercice Z.6** ☐ ✍ **Exercice Z.7** ☐ ✍ **Exercice Z.8**

I.3 Opérations

Propriété I.3.1

Si u et v sont deux applications linéaires de E dans F alors toute combinaison linéaire de u et v est encore une application linéaire de E dans F. Plus précisément :

$$\mathscr{L}(E,F) \text{ est un sev de } \mathscr{F}(E,F)$$

Propriété I.3.2 (composition)

La composée de deux applications linéaires est aussi une application linéaire.

Propriété I.3.3 (reciproque)

Si u est un isomorphisme de E dans F (c'est à dire une application linéaire bijective) alors son application réciproque u^{-1} est aussi linéaire.

Preuve

S8

☐

On rappelle que la composée de deux applications bijectives est bijective, ce qui se traduit (avec la propriété précédente) pour les automorphismes en disant que l'ensemble des automorphismes de E forme le groupe $GL(E)$.

☐ ✍ **Exercice Z.9** ☐ ✍ **Exercice Z.10** ☐ ✍ **Exercice Z.11** ☐ ✍ **Exercice Z.12**

I.4 Applications linéaires et équations

On va ici "unifier/généraliser" des résultats que l'on a déjà rencontrés dans les chapitres "systèmes" et "equations différentielles" et que l'on trouvait fort proches !

Propriété I.4.1

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $b \in F$.
Si l'ensemble $\mathscr{F}_b$ des solutions de l'équation $u(x) = b$ est non vide, et si a vérifie $u(a) = b$ (solution particulière) alors on a :

$$\mathscr{F}_b = a + Ker(u) = \{a + h, h \in Ker(u)\}$$

Preuve

S9

□

Exemple –

1. *Équations différentielles linéaires d'ordre 1 :* on a vu que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : $y' + a(x)y = b(x)$ était constitué des fonctions y de la forme $y = y_p + y_h$ où y_p était une solution particulière et y_h une solution de l'équation homogène. Explication :
Considérons l'application :

$$u : y \in \mathscr{C}^1 \longmapsto y' + ay \in \mathscr{C}^0$$

C'est une application linéaire, et résoudre (E) revient à chercher les solutions de l'équation $u(y) = b$ (Le noyau de u correspond aux solutions de l'équation homogène)

2. *Équations différentielles linéaires d'ordre 2 :* même démarche

3. *Systèmes linéaires :*

S10

□ ✍ **Exercice Z.13**

II Bases et applications linéaires

II.1 Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Propriété II.1.1

Soit $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille d'éléments de E et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On note $u(\mathscr{F}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$.

- On a : $u(Vect(\mathscr{F})) = Vect(u(\mathscr{F}))$. En particulier, si $\mathscr{F}$ est génératrice de E alors $u(\mathscr{F})$ est génératrice de $Im(u)$
- Si $\mathscr{F}$ est **libre** et u **injective** alors $u(\mathscr{F})$ est **libre**.
- Si $\mathscr{F}$ est une **base** de E, alors u est **injective** si et seulement si $u(\mathscr{F})$ est **libre**.
- Si $\mathscr{F}$ est une **base** de E, alors u est **bijective** si et seulement si $u(\mathscr{F})$ est une **base** de F.

Preuve

S11

$\square$

Exemple – Montrer que l'application $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (a,b,c) & \longmapsto & aX^2 + (2a-b)X + b + c \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $R_2[X]$.

S12

II.2 Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base

☺ Théorème II.2.1

Soit E et F deux espaces vectoriels. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille quelconque de vecteurs de F (pas nécessairement distincts). Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad u(e_i) = f_i$.

On retiendra qu'une application linéaire est entièrement déterminée à partir de l'image d'une base.

Preuve

S13

☐

Propriété II.2.2 (Cas particulier important)

Si u est une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ alors elle est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

☐ ✍ **Exercice Z.14** ☐ ✍ **Exercice Z.15** ☐ ✍ **Exercice Z.16**

III Matrice et applications linéaires

On va voir dans cette partie comment la notation matricielle est un bon outil pour manipuler des familles de vecteurs dans un espace vectoriel, et plus généralement, des applications linéaires.

III.1 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Si E est un espace vectoriel, pour chaque choix d'une base $\mathscr{B}$, on peut associer à tout vecteur v de E la liste des composantes de sa décomposition dans la base $\mathscr{B}$ que l'on notera dans une matrice colonne et réciproquement (On construit ainsi un isomorphisme d'espace vectoriels). On identifiera par habitude ces deux objets.

♪ Définition III.1.1 (matrice d'une famille de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle **matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$** la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $M_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_p)$, dont les colonnes sont pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ les composantes de v_j dans $\mathscr{B}$.

Exemple –

- Si $A=(a_{i,j})\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice de la famille $(v_1,\dots,v_p)$ dans la la base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$, donner l'expression du vecteur $v_j=$ ....
- Écrire la matrice M de la famille $(1,(X-1),(X-1)^2,(X-1)^3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$:

S14

III.2 Matrices d'une application linéaire

Dans ce paragraphe, E et F sont deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathscr{B}_E=(e_1,\dots,e_p)$ et $\mathscr{B}_F=(f_1,\dots,f_n)$.
Puisque l'on a vu qu'une application linéaire était entièrement définie à partir des images d'une base, on peut définir sa matrice de la façon suivante :

Définition III.2.1

La matrice de $u\in\mathscr{L}(E,F)$ dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$, notée $M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}$, est la matrice de la famille $u(\mathscr{B}_E)$ dans la base $\mathscr{B}_F$.

S15 Dessin :

Exemple – Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$, on considère l'endomorphisme u défini par $u(e_1)=e_2+e_1$, $u(e_2)=e_3$ et $u(e_3)=e_1-e_3$. Donner $M_{\mathscr{B}}(u)$:

S16

Si pour $x\in E$ on note $u(x)=y\in F$, on peut retrouver une écriture analogue à l'aide des matrices avec la propriété suivante :

Propriété III.2.2

Avec $x \in E$ et $y = u(x) \in F$ on pose :

$$X = M_{\mathscr{B}_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = M_{\mathscr{B}_F}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(u) = (a_{i,j})$$

Alors on a : $\boxed{Y = AX}$ *ie* $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$

Preuve

S17

☐

III.3 Application linéaire associée à une matrice

Réciproquement, si l'on dispose d'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ainsi que de deux espaces vectoriels E et F munis respectivement des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$, alors on peut définir l'application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ qui à tout vecteur $x \in E$ de composantes $(x_1, \dots, x_p)$ dans $\mathscr{B}_E$ associe le vecteur $y = u(x) \in F$ de composantes $(y_1, \dots, y_n)$ en posant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$$

Remarquons qu'une même matrice A ne définit pas une application linéaire tant que l'on a pas choisi les espaces E et F ainsi que des bases pour ceux-ci... mais en pratique, si ces choix n'ont pas été faits, on considérera l'application linéaire canoniquement associée à A de la façon suivante :

♪ Définition III.3.1

Lorsque $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle *application linéaire canoniquement associée* à A, l'application $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont A est la matrice dans les bases canoniques.

Exemple – On note $y = (y_1, y_2)$ l'image de $x = (x_1, x_2, x_3)$ par l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Exprimer les y_i en fonctions des x_j :

S18

On peut alors définir les noyaux et images d'une matrice :

♪ Définition III.3.2

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on introduit u l'application linéaire canoniquement associée à A et on définit :

- Le noyau de A : c'est le noyau de u,
- L'image de A : c'est l'image de u.

EXEMPLE – Donner une base des images des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

S19

MÉTHODE – Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et A sa matrice associée dans un couple de bases déterminé. Pour déterminer le noyau de f on peut bien sûr directement chercher les $x \in E$ tels que $f(x) = 0$, mais on peut aussi utiliser la notation matricielle et chercher les $X \in \mathbb{K}^p$ tels que $AX = 0$ (voir exercices).

III.4 Produit matriciel / composition d'applications linéaires

La notation matricielle est pratique pour faire des calculs de composition sur les applications linéaires.

Propriété III.4.1

Soit E, F et G trois ev de bases $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$. Considérons $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. On a :

$$M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(v \circ u) = M_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(v) M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(u)$$

En particulier pour la bijectivité :

Propriété III.4.2

Soit E et F deux ev de bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$. Alors une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est bijective (est un isomorphisme) si et seulement si $M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(u)$ est inversible, et l'on a alors $M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(u)^{-1} = M_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(u^{-1})$.

Preuve

On l'admettra, même si elle serait intéressante ;-) ☐

☐ ✍ **Exercice Z.17** ☐ ✍ **Exercice Z.18** ☐ ✍ **Exercice Z.19** ☐ ✍ **Exercice Z.20**
☐ ✍ **Exercice Z.21**