

PLANCHE Z

APPLICATIONS LINÉAIRES

□ Exercice Z1

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère l'application $\varphi : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$f \mapsto af'' + bf' + cf$$

Est-elle linéaire ? Est-elle injective ?

□ Exercice Z2

Q1 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que les applications $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont linéaires.

$$(x, y) \mapsto ax + by$$

Q2 a. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que les applications $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont des endomorphismes de \mathbb{R}^2 .

$$(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$$

b. À quelle condition nécessaire et suffisante une telle application est injective ?

□ Exercice Z3

Si $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ (on dit que φ est une *forme* linéaire), montrer que $\varphi = 0$ ou φ surjective.

□ Exercice Z4

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si F' est un sev de F , montrer que $u^{-1}(F')$ est un sev de E . (*Rem : u n'est pas nécessairement bijective...*)

□ Exercice Z5 (Noyau)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x_1, x_2, \dots, x_n des éléments deux à deux distincts de \mathbb{K} . On pose

$$\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}^n \\ P \mapsto (P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)) \end{array}$$

Q1 Vérifier que φ est linéaire.

Q2 Montrer que sa restriction φ_n à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est injective.

Q3 Préciser le noyau de φ .

□ Exercice Z6 (Noyau)

Soit φ un endomorphisme d'un \mathbb{K} -ev E . On définit l'ensemble des vecteurs invariants par $\varphi : \text{Inv}(\varphi) = \{x \in E \mid \varphi(x) = x\}$

Q1 Justifier sans calcul que $\text{Inv}(\varphi)$ est un espace vectoriel. Identifier son intersection avec $\text{Ker}(\varphi)$.

Q2 Soit φ_1 un automorphisme de E . À quelle condition a-t-on $\text{Inv}(\varphi_1) \oplus \text{Ker}(\varphi_1) = E$?

Q3 Soit l'endomorphisme φ_2 de \mathbb{R}^3 défini par : $(x, y, z) \mapsto (x + y, y + z, x - z)$. Déterminer des générateurs des ensembles $\text{Inv}(\varphi_2)$ et $\text{Ker}(\varphi_2)$. Sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ?

□ Exercice Z7 (Injectivité)

Q1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y, y - x)$.

- a. Montrer que f est une application linéaire.
- b. Trouver des générateurs de son noyau et de son ensemble image. Que peut-on en conclure ?

Q2 Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + y - 1, 2x - y)$.

Montrer que g n'est pas un endomorphisme, mais qu'elle est injective.

Q3 Soit $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi : E \rightarrow F$
 $f \mapsto f' - 2f$

- a. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, puis montrer qu'elle n'est pas injective.
- b. On note $\mathbb{R}[x]$ le \mathbb{R} -ev des fonctions polynomiales à coefficients réels. Prouver que la restriction de φ à $\mathbb{R}[x]$ est injective.

□ Exercice Z8 (Injectivité/surjectivité)

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$ on pose $\varphi(f) = g$ avec $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$

Montrer que φ est un endomorphisme de E . Est-il injectif, surjectif ?

□ Exercice Z9 (Un lemme ultra classique : composition)

Soit u et v deux endomorphismes d'un ev E qui commutent (i.e $u \circ v = v \circ u$). Montrer que le noyau et l'image de v sont stables par u .

□ Exercice Z10 (Composition)

Soit r et s les deux applications de \mathbb{R}^2 définies par $s(x, y) = (y, x)$ et $r(x, y) = (-y, x)$. Vérifier que r et s sont des endomorphismes. Commutent-ils ?

□ Exercice Z11 (Noyaux, images, composition et égalité d'ensembles)

Soit E, F et G trois \mathbb{K} -ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que :

$$\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g), \quad \ker(f) \subset \ker(g \circ f), \quad \text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$$

□ Exercice Z12 (Noyaux, images, composition et égalité d'ensembles)

Soit E un \mathbb{K} -ev et f un endomorphisme de E . Montrer que :

$$\ker(f \circ f) = \ker(f) \iff \text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$$

□ Exercice Z13 (Équations linéaires)

Soit x_1, x_2, y_1 et y_2 des éléments de \mathbb{K} tels que $x_1 \neq x_2$. On se propose de déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que : $P(x_1) = y_1$ et $P(x_2) = y_2$

Q1 Justifier qu'il existe un unique polynôme $P_0 \in \mathbb{K}_1[X]$ qui soit solution.

Q2 Donner toutes les solutions en considérant l'application $u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}^2$
 $P \mapsto (P(x_1), P(x_2))$

□ **Exercice Z14 (Application linéaire et bases)**

Q1 On a vu que pour $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, les applications $u : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ sont linéaires. Réciproquement, $(x, y) \mapsto ax + by$ montrer que toute application linéaire de \mathbb{K}^2 dans \mathbb{K} est de cette forme (On pourra utiliser la base $(1, 0), (0, 1)$).

Q2 On a vu que pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, les applications $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont des endomorphismes de \mathbb{R}^2 . Montrer que tout endomorphisme de \mathbb{R}^2 est de cette forme.

□ **Exercice Z15 (Application linéaire et espaces supplémentaires)**

Dans \mathbb{R}^3 on considère $F = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

Q1 Vérifier que F et G sont supplémentaires.

Q2 Soit $v \in \mathcal{L}(F, E)$ définie par $v(a, b, 0) = (-b, a, 0)$ et $w \in \mathcal{L}(G, E)$ définie par $w(c, c, c) = -(c, c, c)$. On définit alors u qui coïncide avec v et w . Montrer que $u^4 = Id_E$.

□ **Exercice Z16 (Application linéaire et espaces supplémentaires)**

Soit E et E' deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, E')$. Prenons F et G deux sev de E .

Q1 Montrer que l'on a $u(F + G) = u(F) + u(G)$

Q2 Si F et G sont en somme directe et si u est injective, montrer que les sev $u(F)$ et $u(G)$ sont en somme directe aussi.

□ **Exercice Z17 (Matrices associées à une application linéaire)**

Déterminer la matrice canoniquement associée aux applications linéaires :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x - 5y + 4z \end{array} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array} \quad \text{et}$$

$$h_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \quad (\text{pour } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \text{ fixée}).$$

□ **Exercice Z18 (Classique – matrice d'un rotation)**

Dans le plan vectoriel usuel muni de sa base canonique (\vec{i}, \vec{j}) , on considère la rotation (vectorielle, donc de centre O) r d'angle θ .

Q1 Donner la matrice de r dans la base canonique.

Q2 Si $v = x\vec{i} + y\vec{j}$, donner l'expression de $v' = r(v)$.

□ **Exercice Z19**

$$\text{Soit } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & (X^2 - 1)P'' + 2XP' \end{array} .$$

Q1 Vérifier que f induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (on le notera toujours $f \dots$)

Q2 Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Q3 En déduire $\ker(f)$

□ Exercice Z20 (Image explicite/implicite)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Q1 Que représente la famille $\mathcal{F} = \{(1, -2, 1), (1, -1, 2), (-1, 4, 1)\}$ pour $Im(A)$?

Q2 On souhaite maintenant obtenir une représentation implicite de $Im(A)$, c'est à dire un système d'équations de l'image de A . Pour cela, on rappelle que $Im(A) = \{AX / X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\}$. Ainsi, un élément Y est dans $Im(A)$ si et seulement si le système $AX = Y$ est compatible. Expliciter la compatibilité de système pour trouver que $Im(A) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / y_3 - 3y_1 - y_2 = 0\}$.

□ Exercice Z21

En utilisant l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ déterminer A^n .